高等数学

高等学校教材 GAO DENG SHU XUE



上册

蔡高厅 叶宗泽 主编



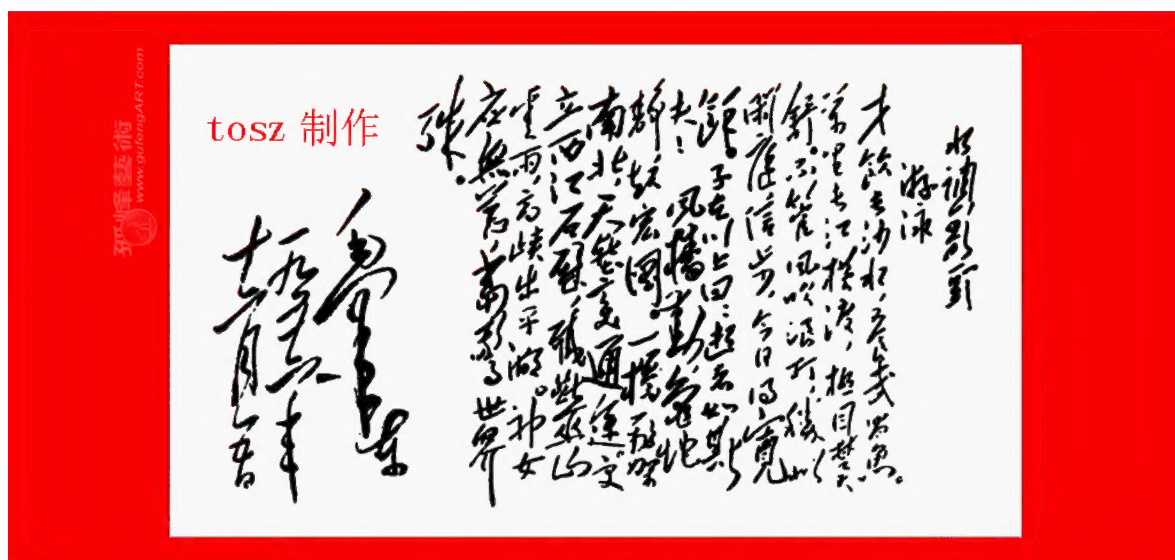
天津大学出版社

高等学校教材

高等数学

上册

蔡高厅　叶宗泽　邱忠文　梁立华　编



天津大学出版社

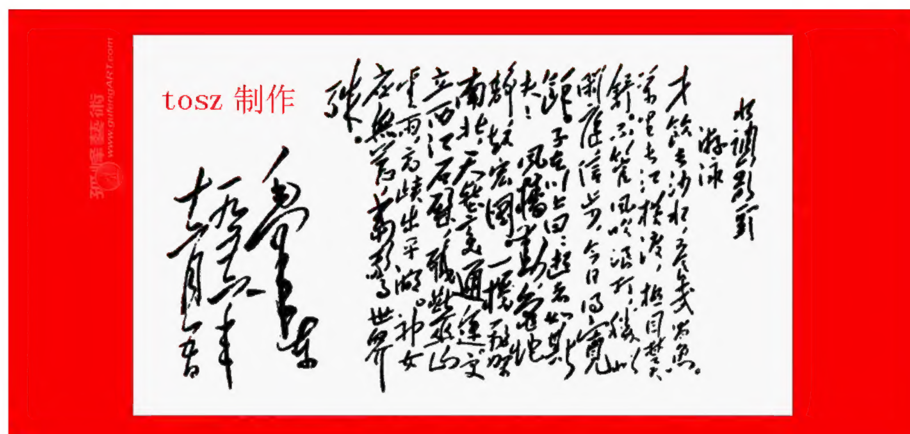
前　　言

为了适应我校教学的需要，多年来高等数学课程一直使用自编教材。经过多年的教学实践，积累了一定的教学和教材建设的经验；采用我校所编教材的有关院校同行也提出了一些宝贵意见。此次我们根据这些经验和意见，吸取教学改革的一些成果，并参照经国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，对教材和习题集进行重新编写，并对部分内容作了调整。为了便于教学，将空间解析几何与矢量代数安排在上册。

参加本书编写工作的有蔡高厅、叶宗泽、邱忠文及梁立华。限于编者水平，这次编写不免仍有疏误，恳请读者指正。

编　者

1993.10



目　　录

第一章 函 数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映，是微积分学的研究对象. 中学里已学过初步的函数概念，本章我们从集合的映射这一角度出发来分析这个概念，并且简略介绍复合函数、反函数以及常用初等函数的一些主要性态.

§1 集合与集合的映射

一 集合

集合是数学的一个基本概念。通常把集合理解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体. 例如，某班全体学生；一个书柜中的所有的书；正切为$\sqrt{3}$的所有的角等等，都是集合. 组成集合的个体叫做这个集合的元素. 所谓“给出了一个集合”就是随意考虑一个对象，必可确定它是不是这个集合的元素. 集合常用斜体大写字母A，B，C，…等表示. 元素用小写字母a，b，c，x，t，…等表示. 如果a是集合A的元素，就记为：$a\in A$，读作“a属于A”. 否则，记为：$a\notin A$，读作“a不属于A”.

不含任何元素的集合叫做空集合. 空集合用记号ϕ表示.

由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示. 例如，由元素a_1，a_2，…，a_n组成的集合A，可记作

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用以下记号表示：设M是具有某种特性的元素x所组成的集合，就记作

$$M=\{x \mid x\text{所具有的特性}\}.$$

例如集合

$$E=\{\text{点}(x,y)\mid x, y\text{为实数}, x^2+y^2\leqslant 1\},$$

表示E是由平面上这样的点所组成：它的每个点位于中心在原点的单位圆内，或在圆周上.

下面列出几个有关集合的定义.

定义 已给两个集合A与B. 如果A的每一个元素都是B的元素，则称A是B的子集，记为$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$，读作"A含于B"或"B包含A". 如果集合A是集合B的子集，而B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$，或$B\supset A$.

由定义可知，显然有$A\subseteq A$，$\phi\subseteq A$，即任何一个集合是它自己的子集，空集是任一集合A的子集.

定义 设有集合A与B，如果$A\supseteq B$，$B\supseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$.

定义 由集合A的一切元素与集合B的一切元素所组成的集合叫做A与B的并，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

定义 由属于集合A又属于集合B的一切元素组成的集合叫做A与B的交，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

定义 由属于集合A但不属于集合B的一切元素组成的集合叫作A与B的差，记为$A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

如果所讨论的集合都是某一集合U的子集，则称U为全集.

定义 如果A是全集U的子集，则U中不属于A的元素所组成的集合，叫做A的补集（或余集），记为$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=U\setminus A.$$

二 集合的映射

定义 设有两个集合A与B，f表示某种确定的对应规律，使

得对每一个元素$x \in A$，通过f都有唯一的元素$y \in B$与之对应，则称f是由A到B的映射，记为

$$x \xrightarrow{f} y \text{或} f(x)=y.$$

y叫做x（在映射f下）的象，而x叫做y（在映射f下）的原象.

由A到B的映射f也常记为

$$A \xrightarrow{f} B \text{或} f: A \to B.$$

A叫做f的定义域. $B_f=\{y \mid y=f(x),\ x \in A\}$叫做$f$的值域. 显然$B_f \subseteq B$.

例1 设A、B分别表示某足球队全体队员及他们的号码所成的集合，f表示A中每一个元素（队员）取他的号码的对应规律，则f就是一个由A到B的映射.

例2 设T表示平面上所有三角形的集合，记号R表示全体实数所组成的集合，f表示对于T中每一个元素（三角形）取它的面积的对应规律，则f便是一个由T到R的映射.

例3 设R_+表示全体正实数所成集合，$x \in R_+$则

$$x \xrightarrow{f} \lg x \qquad \text{或} \qquad f(x)=\lg x,$$

是一个由R_+到R的映射.

在上述定义中，若$B_f \subset B$，则称f是由A到B内的映射，简称内射；若$B_f=B$，则称f是由A到B上的映射，或者说f是映上的，简称满射. 上面例1、例3的映射是满射，而例2则是内射.

从例2我们看到，集合T中不同的元素（三角形）可以有相同的象（面积）. 如果在上述定义中，假定A中不同的元素在B中必有不同的象与之对应，即若$x_1 \neq x_2$则$f(x_1) \neq f(x_2)$，这样的映射称为单一的或简称单射. 上面例1，例3是单一的映射，而例2的映射则不是单一的映射.

例4 设$A=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B=\{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，设

$f: A\to B$ 由$f(x)=x^2$来定义，则f是满射，但不是单射；若将A，B改为：$A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，则由上式所确定的$f$是单一的，但不是映上的；若$A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，则$f$既是映上的，又是单一的．

如果从A到B的映射既是满射又是单射，便称映射$f: A\to B$为一一映射或一一对应．这时B中每一个元素y都在A中有而且只有一个原象与之对应，因此就产生了一个由B到A的映射，称为f的逆映射，记为f^{-1}：$B\to A$，或简记为f^{-1}．

最后，关于集合映射的定义有以下两点值得注意：

1　映射是由A、B、f三者确定的．对于两个映射，即使对应规律相同，而A不同，也应当认为是两个不同的映射，例如

$$f(x)=x^2-1 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$
$$g(x)=x^2-1 \qquad (0\leqslant x\leqslant 2)$$

就是两个不同的映射．

2　记号“f”与“$f(x)$”是有区别的，f表示由x（$x\in A$）产生y（$y\in B$）的对应规律，而$f(x)$表示在映射f下x的象y，即$f(x)=y$．

§2　实数集

一　实数与数轴

在高等数学中研究的问题，绝大多数是在实数范围内进行的．今后如果没有特别声明，本书所提到的数都是实数．

全体自然数的集合记作N．全体整数的集合记作Z．全体有理数的集合记作Q．全体实数的集合记作R．

通常用实数轴上的点作为实数的几何表示．实数轴是一条指定了正向、在其上选定了原点O并且规定了单位长度的有向直线（图1-1）．负数对应的是原点左侧上的点；正数对应原点右侧上的

$$[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,\ b]$ 的端点．这里 $a\in[a,\ b]$，$b\in[a,\ b]$．类似地可说明

$$[a,\ b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\},$$
$$(a,\ b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间．

以上这些区间都称为有限区间．数“$b-a$”称为这些区间的长度．从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段．闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1－2（1）与（2）所示．此外还有所谓无限区间．引进记号“$+\infty$”（读作正无穷大）及“$-\infty$”（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1－2（3）、（4）所示．

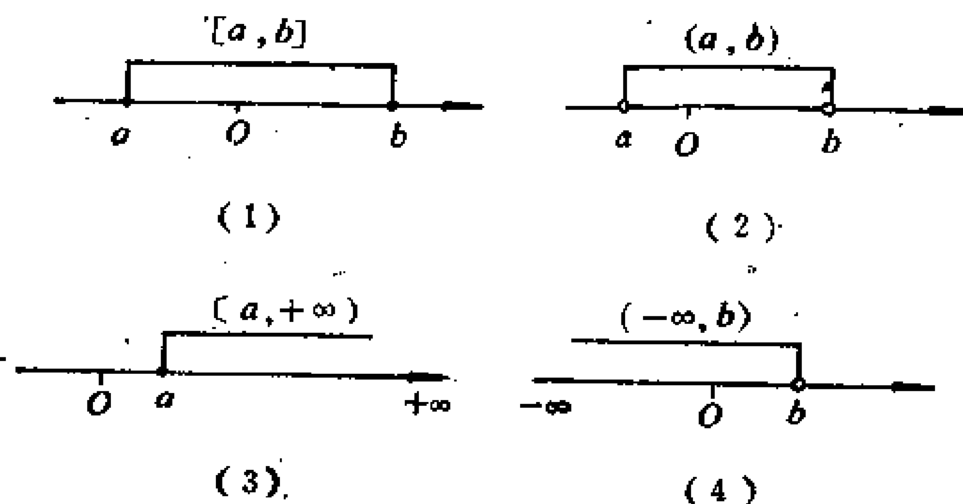


图 1-2

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$．它也是无限区间．

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，就简称它们为“区间”，且常用字母 I 表示．

邻域也是一个经常用到的概念。设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$。数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$。点 a 叫做这个邻域的中心，δ 叫做这个邻域的半径。

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于：$a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

也就是说，$U(a,\delta)$ 实际上就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$。今后我们总是在研究 a 点附近的数值时使用邻域这个概念。所以，δ 一般是很小的正数，尽管定义中并没有这个限制。

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉。点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或 $\quad U(\hat{a},\delta)=U(a,\delta)\setminus\{a\}$。

§ 3　函数概念

一　变量与常量

人们在实践过程中经常遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持同一个数值，这种量叫常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫变量。

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们可以取不同的数值。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析。例如，就地球表面附近地区而言，重力加速度可以看作常量，但就更广阔的范围来说，重力加速度则是变量。

通常用字母 a、b、c、…等表示常量，用字母 x、y、z、t、…等来表示变量。

设变量 x 所取数值的全体组成数集 A，那末变量 x 也可以看作

表示数集A中任何元素的符号. 例如，若变量x所取数值全体组成开区间（a，b），那末x就表示数集

$$(a,b)=\{x\,|a<x<b\}$$

中任何元素的符号、特殊地，如果数集只含一个元素，那末表示数集元素的符号就是常量. 在这个意义上，常量可以看作是变量的特殊情形.

二　函数的定义

客观世界的事物，总是直接或间接地互相联系、相互制约的. 在某一种自然现象或某一技术过程中，往往有若干个变量相互联系并遵循着一定的变化规律而变化着. 下面仅就过程中只涉及两个变量的情形（多于两个变量的情形以后第八章再讲）举几个例子.

例1　自由落体运动. 设物体下落的时间为t，落下的距离为s，开始下落的时刻$t=0$，物体着地时刻为$t=T$. 由物理学知道，变量s与变量t之间的关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

给出，其中g是重力加速度. 由上述关系式可知，当t在闭区间$[0,T]$上任取一个数值时，按照上式给定的规律，就有一个确定的数值s和它对应.

例2　为了掌握气温的变化，气象台每天用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化的曲线. 如图1-3所示的某一天记下的气温变化曲线，图中横坐标是时间t，纵坐标是温度T. 曲线的图形反映出时间t在区间$[0,24]$上变化时，温度T随时间t变化的规律. 曲线上任一点$P(a,b)$表示在时刻$t=a$时，测得的气温$T=b$. 所以，在$0\leqslant t\leqslant 24$这个区间上，对每一个确定的时间t，根据曲线的图象都有一个确定的温度T和它对应.

例3　若弹簧一端固定，另一端挂上重物，则弹簧长度l随重物重量P而变化. 设弹簧最大负荷量为10kg，用实验方法测得长度

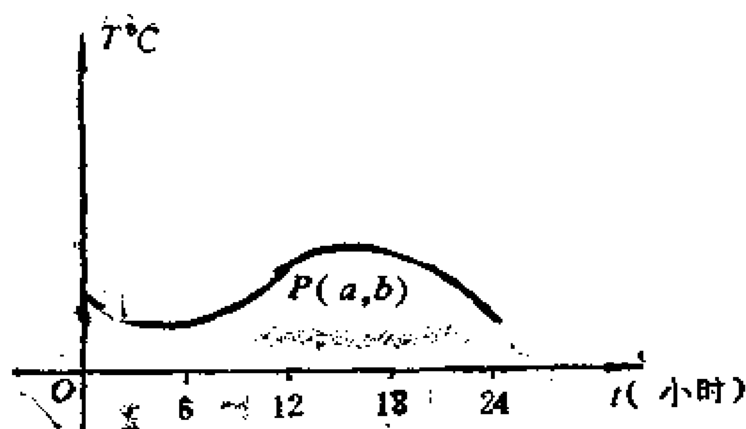


图 1-3

l 与负荷重量 P 之间的关系用表给出：

P (kg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l (cm)	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17

在这里，l 和 p 是两个变量. p 的取值范围是$\{0, 1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$. 在这个范围内每给定一个 p 的值，根据上表都有一个确定的数值 l 和它对应. 变量 p 与 l 之间的对应规律是由一个数值关系表给出的.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系. 这种相依关系给出一定的对应规律（这种规律可以用公式给出，也可用表格或图象甚至其它某种约定的方式给出），根据这一规律其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有一个确定的数值与之对应. 两个变量的这种对应关系，我们可以用集合映射的概念把它归纳为如下的函数定义.

定义 设有两个数集 A、B，f 是一个确定的对应规律，如果对于 A 中每一个数 x，通过 f，B 中都有唯一的数 y 和它对应，记为

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{或} f(x)=y,$$

这时，称f是A到B的函数，或f是A上的函数，并称A为函数的定义域. 当x遍取A中一切数时，与它对应的数y组成数集

$$B_f=\{y \mid y=f(x),\ x\in A\},$$

称B_f为函数的值域，显然$B_f\subseteq B$. 变数x叫做自变量；变数y随x的给定而确定，叫做因变量.

由定义可知，一个函数是由对应规律f和函数定义域A确定的，值域$B_f\subseteq B$是随着f和A给定而确定的. 将函数定义与映射定义加以对比，不难发现，函数概念是映射概念的特殊情况：由一个数集到另一个数集的映射，因此有关映射的术语和说明，对函数概念也完全适用. 例如：记号"f"是表示由x($x\in A$)产生y($y\in B$)的对应规律，而$f(x)$表示通过f在B中与x对应的那个数，这两者是有区别的. 但习惯上常把A上的函数f说成"变量y是变量x的函数"，并且用符号$y=f(x)$来表示. 从这个意义上讲，两者表示的是同一概念.

根据定义可知，前面三个例子给出了三个函数. 在例1中s是t的函数，定义域是$[0,T]$；在例2中T是t的函数，定义域是$[0,24]$；在例3中弹簧长度l是悬挂重物的重量p的函数，它的定义域是数集$\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$. 这三个例子同时还体现了函数对应规律的三种常见的表示方法，即公式表示法（或分析表示法）、图形表示法与表格表示法. 在高等数学中，主要是研究用公式表示法所表示的函数，同时为了加强直观性也借助于图形表示法，使研究的问题更形象且更便于理解.

函数中表示对应关系的记号"f"也可以改用其它字母，例如"φ" "F" "Ψ"等. 这时函数就记作$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，$y=\Psi(x)$，等等.

在数学中，经常不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用公式表达的函数. 这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使

公式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$；函数 $y=\lg(x+1)$ 的定义域是 $(-1, +\infty)$.

最后，关于函数定义还要指出一点. 在定义中要求对于每一个 $x\in A$，在 B 中只能有唯一的 $y\in B$ 和它对应. 所以常把这种函数叫单值函数. 按照这个定义，如果对于某些 $x\in A$ 对应的 y 值不止一个，则应认为函数不存在（或不能确定函数关系）. 但是有时为了方便也称之为多值函数. 今后本书所说的函数一律是单值函数. 遇有多值函数的时候，每次只限于选定其中的一个单值的分支来研究.

三 函数的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 我们在平面上建立直角坐标系 xoy，并把满足对应关系 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 的数组 (x, y) 看作 xoy 平面上的一点，则当 x 遍取 D 上的每一个数值时，就得到点 (x, y) 的一个集合 C：

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D\}.$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

下面举几个例子.

例 4 函数 $y=2$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{2\}$. 它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-4 所示.

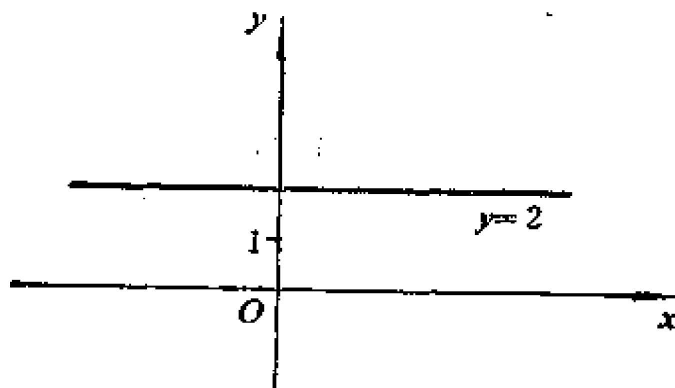


图 1-4

例5 函数$y=\sqrt{1-x^2}$，它的定义域$D=[-1,\ 1]$，值域为$[0,1]$. 其图形为上半个单位圆，如图1－5所示.

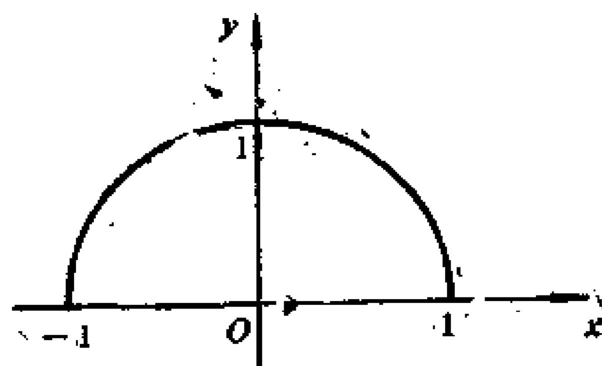


图 1-5

例6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & 当x\geqslant 0,\\ -x, & 当x<0\end{cases}$$

的定义域$D=(-\infty,\ +\infty)$，值域为$[0,+\infty)$. 它的图形如图1－6所示.

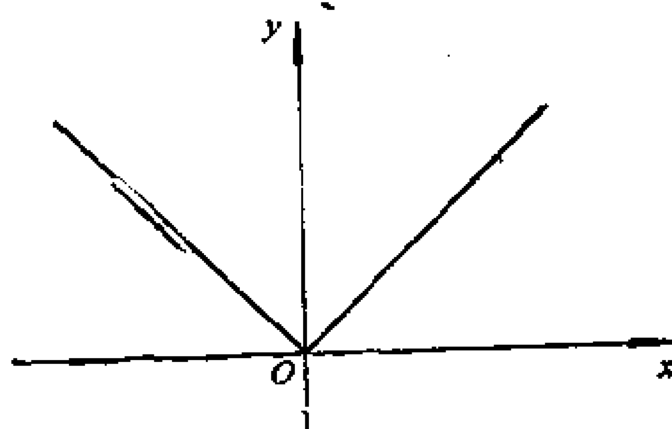


图 1-6

例7 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0,\\ 0, & 当x=0,\\ -1, & 当x<0\end{cases}$$

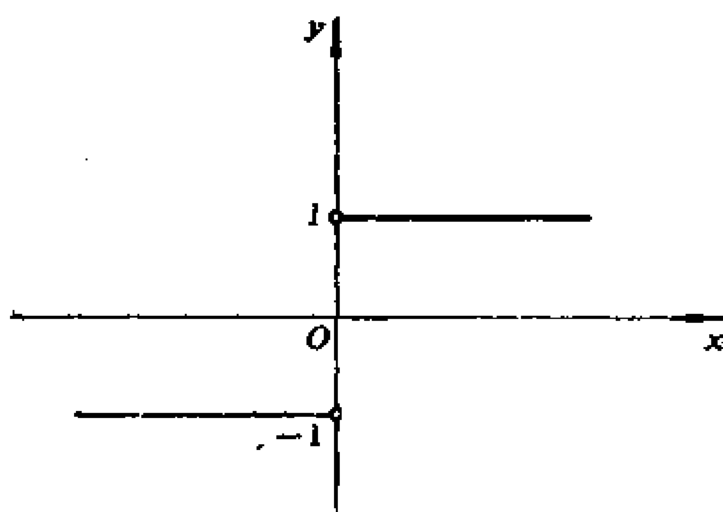


图 1-7

称为符号函数．它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$．其图形如图1－7所示．

例8　设x为任一实数．不超过x的最大整数记作$[x]$．例如：$[\frac{4}{7}]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-3.5]=-4$，$[4]=4$，$[-2]=-2$．把x看成变量，则$y=[x]$就是一个函数，其定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域为Z（全部整数）．图形如图1－8所示，这图形称为阶梯曲线．

由例6、例7看到，有时一个函数要用几个式子表示．这种在自变量的不同变化范围中，对应规律用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数．在这里要注意：用几个式子来表示一个函数，绝不能理解为几个函数．在自然科学和工程技术中，经常会遇到这种分段函数．

例9　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 当 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & 当 x>1\end{cases}$$

是一个分段函数．它的定义域$D=[0,+\infty)$．当$x\in[0,1]$时，对应函数值$f(x)=2\sqrt{x}$；当$x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值

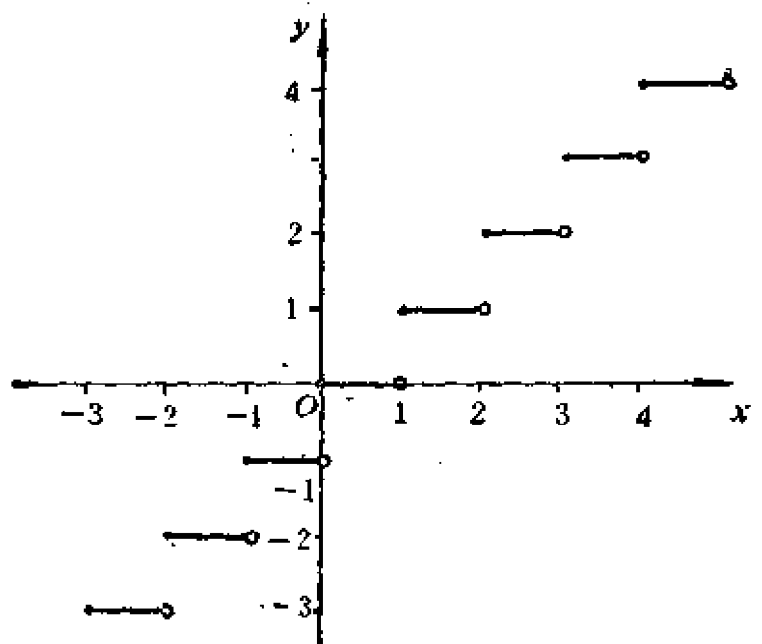


图 1-8

$f(x)=x+1$．例如，因为 $\frac{1}{2}\in[0,1)$，所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=3+1=4$．

作分段函数的图形要分段来作．本例所给函数的图形如图 1-9 所示．

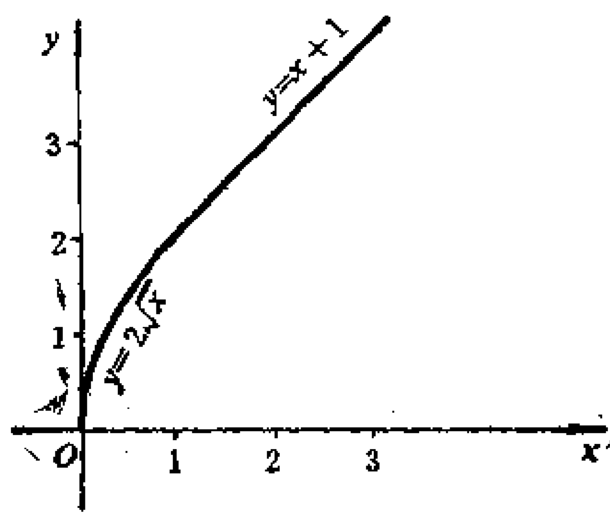


图 1-9

2　函数的单调性　设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$。如果对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加的（图1-10）；如果对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上是单调减小的（图1-11）。单调增函数和单调减函数统称单调函数，使函数保持单调性的自变量区间叫做单调区间。

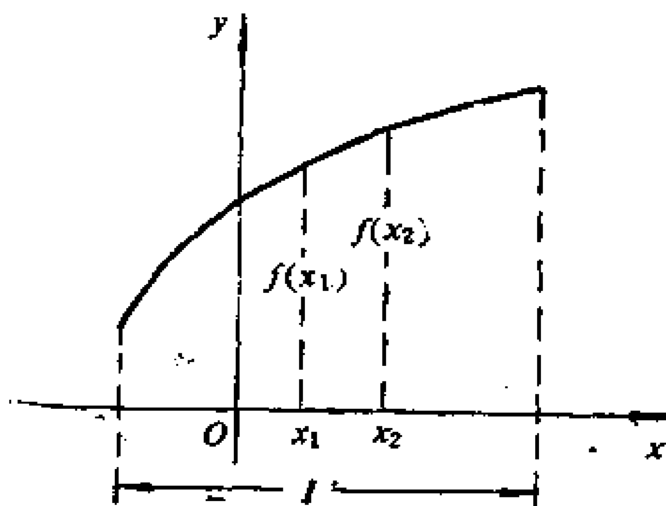


图 1-10

例如，函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减小的。在$(-\infty,+\infty)$内函数$f(x)=x^2$不是单调的。又如，函数$f(x)=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。

3　函数的奇偶性　设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称(即若$x\in D$，则必有$-x\in D$)。如果对于任一$x\in D$，等式

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为偶函数。如果对于任一$x\in D$，等式

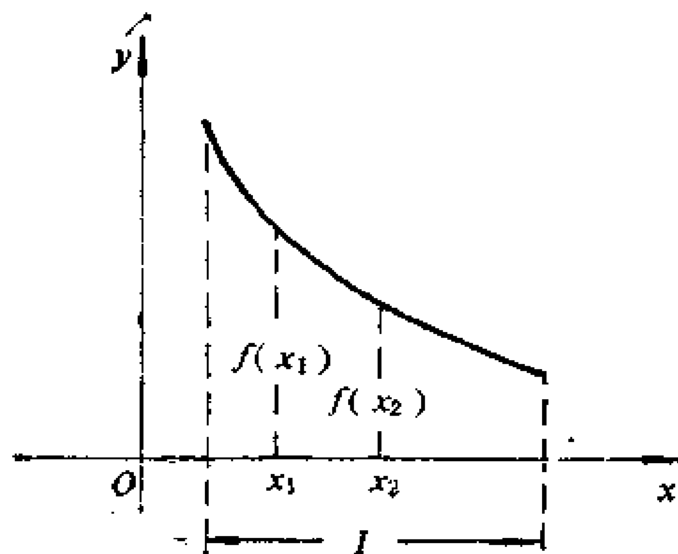


图 1-11

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为奇函数。

例如，$f(x)=x^2$是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 又例如$f(x)=x^3$是奇函数，因为$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

偶函数的图形关于y轴是对称的，因为这时有$f(-x)=f(x)$，所以如果$A(x, f(x))$是图形上的点，则它关于y轴对称的点$A'(-x, f(x))$也在图形上（图1-12）.

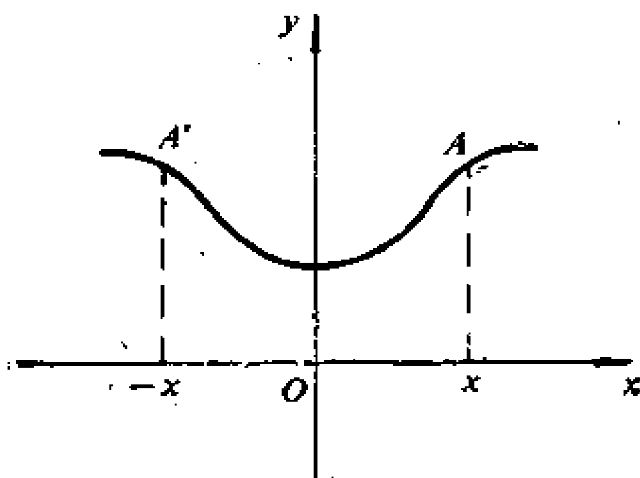


图 1-12

奇函数的图形关于原点是对称的，因为这时有$f(-x)=-f(x)$，所以如果$A(x, f(x))$是图形上的点，则它关于原点的对称点$A''(-x, -f(x))$也在图形上（图1-13）。

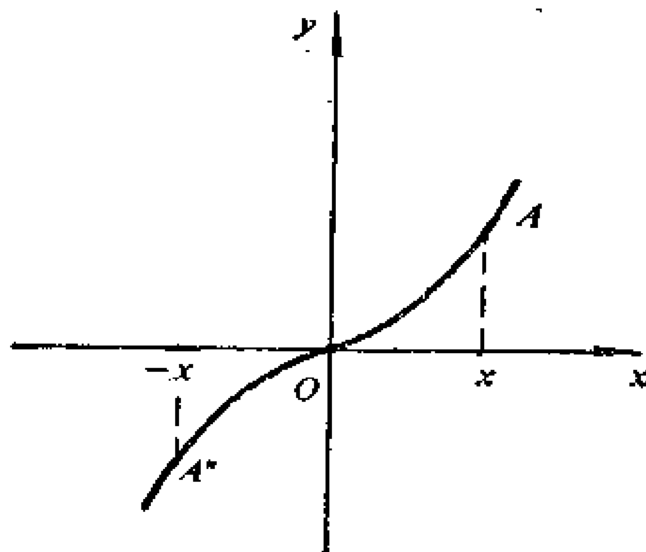


图 1-13

函数$y=\sin x$是奇函数．函数$y=\cos x$是偶函数，函数$y=\sin x+\cos x$既非奇函数，也非偶函数．

4 函数的周期性 设函数$f(x)$的定义域为D．若存在一个不为零的常数T，使得对于任一$x\in D$有$(x\pm T)\in D$，且$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为周期函数，T称为$f(x)$的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期．

例如，函数$y=\sin x$，$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数；函数$y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$都是以π为周期的周期函数．

§4 复合函数与反函数

一 复合函数

复合函数是经常遇到的一种函数结构．例如，由物理学知道，物体的动能E与速度v的关系是

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

其中m是物体的质量．如果考虑一个具体问题：把一个质量为m的物体以初速v_0垂直向上抛出，由于地球引力的关系，它就不断减速．这时速度与时间t满足关系式

$$v=v_0-gt.$$

由上面两个式子可知，物体的动能也是时间t的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

这种形式的函数就叫做复合函数．

定义 设$y=f(u)$是数集B上的函数，$u=\varphi(x)$是由数集A到数集B的一个非空子集B_φ的函数，因此，对于每一个$x\in A$，通过u，都有唯一的y与它对应，这时就在A上产生了一个新的函数，用$f\circ\varphi$表示．函数$f\circ\varphi$称为A上的复合函数，记作

$$x\xrightarrow{f\circ\varphi}y,\ (f\circ\varphi)(x)=y\quad 或\quad y=f(\varphi(x)),\ x\in A,$$

其中u叫做中间变量，A是复合函数的定义域，$f\circ\varphi$表示由$x(x\in A)$产生y的对应规律．

如果将$y=f(u)$的值域记为G，那末，复合函数就可以看作是由A到G的映射．不过，这个映射是由φ和f（先经过φ后经过f）两个映射"复合而成"．

在定义中需要注意的是：复合函数$(f\circ\varphi)(x)$的定义域A，不能等同于函数$u=\varphi(x)$的定义域．数集A是使函数$u=\varphi(x)$的值域B_φ满足$B_\varphi\subseteq B$的实数所组成．所以一般地说，它只是$u=\varphi(x)$的定义域中的某一个部分．

例如，$\sin x^2$是由$\sin u$和$u=x^2$复合而成的复合函数．它的定义域是R．又例如，$\sqrt{x+4}$是由$\sqrt{u}$和$u=x+4$复合而成的复合函数．它的定义域$(-4,+\infty)$，是中间变量$u=x+4$的定义

域R的子集.

例1 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求$f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

解
$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{[\varphi(x)]^2+1}=\frac{1}{x^2+2},$$
$$\varphi[f(x)]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{x^2+1}.$$

可见$\varphi\circ f\neq f\circ\varphi$. 也就是说复合函数的复合次序不能交换.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如, 设$y=\sqrt{u}$, $u=\mathrm{ctg}\,v$, $v=\dfrac{x}{2}$, 则得复合函数$y=\sqrt{\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}}$. 这里, u和v都是中间变量. 在这种情况下, 称这个函数是由两个复合步骤构成的复合函数.

二 反函数

研究任何客观事物, 往往要从正反两个方面来研究. 例如, 研究物体的运动规律, 有时把路程看作时间的函数, 有时又需要反过来把时间看作路程的函数. 这一类事例反映到数学上来, 就产生了反函数概念. 下面给出反函数的定义.

定义 设函数$y=f(x)$, f是一个由数集A到数集B上的一一映射, 则它的逆映射f^{-1}所确定的函数就叫做$y=f(x)$的反函数, 并记为

$$y\xrightarrow{f^{-1}}x \quad 或 \quad x=f^{-1}(y)$$

由定义看到, 由于f是一一映射, 所以显然$y=f(x)$的反函数$f^{-1}(y)$的定义域应当是$f(x)$的值域B, 而其值域则是$y=$

$f(x)$的定义域A.

当函数f不是一一映射的时候，严格地讲，这时f的反函数是不存在的. 但有时为了方便起见，也将这种情况说成f的反函数是多值函数. 例如$y=f(x)=x^2$是一个由R到数集$[0,+\infty)$上的映射，但不是单射（因为当$a>0$时，不同的实数$x_1=-\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a}$对应同一个实数$f(-\sqrt{a})=f(\sqrt{a})=a$）. 所以在$R$上$f$的反函数不存在. 但为方便起见，也可以说$f$定义的反函数是多值函数$x=\pm\sqrt{y}$（图1-14）.

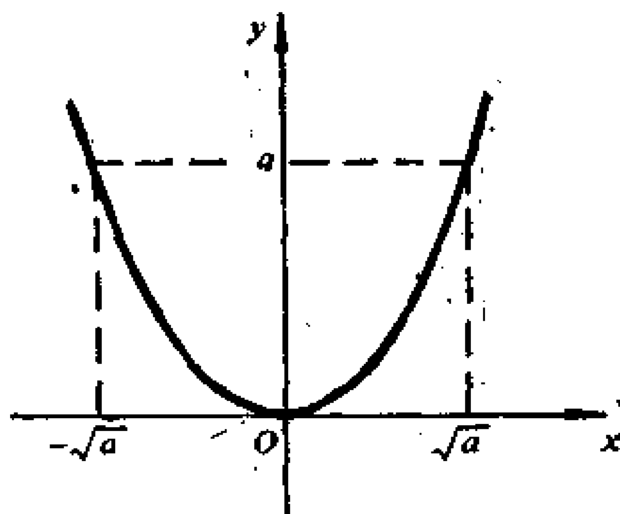


图 1-14

若$y=f(x)$有反函数，则依定义必有恒等式

$$f^{-1}[f(x)]=x, \qquad (x\in A)$$

与之相应，也有

$$f[f^{-1}(y)]=y. \qquad (y\in B)$$

例如，已给函数

$$y=f(x)=\frac{3}{4}x+3, \qquad (x\in R)$$

显然它是一个由R到R的一一映射，其反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{4}{3}(y-3), \qquad (y\in R)$$

可以看到，在这里有

$$f^{-1}(f(x))=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x+3\right)-3\right]\equiv x,$$

$$f(f^{-1}(y))=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3\equiv y.$$

在定义中，反函数的自变量用字母y，因变量用字母x．这与用x表示自变量用y表示因变量的习惯不合，所以有时把定义中的反函数$x=f^{-1}(y)$中的x与y这两个字母互换而写成$y=f^{-1}(x)$。改变代表变量的字母并不影响函数的对应规律和定义域，因此也可以说函数$y=f(x)$的反函数是$y=f^{-1}(x)$。

反函数的这两种形式都要用．大体上说，在研究函数与其反函数关系时用定义中的形式，在单独用一个反函数时常用后一种形式．

函数$y=f(x)$和它的反函数$x=f^{-1}(y)$具有相同的图形．而$y=f^{-1}(x)$的图形则与原给函数$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$呈对称（图1-15）．因为如果$P(a,b)$是$y=f(x)$图形上的点，则$Q(b,a)$必是$y=f^{-1}(x)$上的点，反之，若$Q(b,a)$是$y=f^{-1}(x)$图形上的点，则$P(a,b)$是$y=f(x)$图形上的点．而$P(a,b)$与$Q(b,a)$关于直线$y=x$是对称的（即直线$y=x$垂直且平分线段PQ）．

从函数的图形可以看到：如果函数$f(x)$是单调（增加或减小）的，则这种映射就一定是单一的．于是有下面的反函数存在定理．

定理 设函数$y=f(x)$在区间I上单调增加（或减小），又设和I相对应的值域为B，那末在I上必存在反函数$x=f^{-1}(y)$，它在B上也是单调增加（或减小）的．

证明 设$y=f(x)$在I上单调增加，即对I上的任何两点x_1、x_2，如果$x_1<x_2$必有$f(x_1)<f(x_2)$．这表示对B内的每一个y，在I上有一个且只有一个x使y和x相对应，即f是一个由I到B上

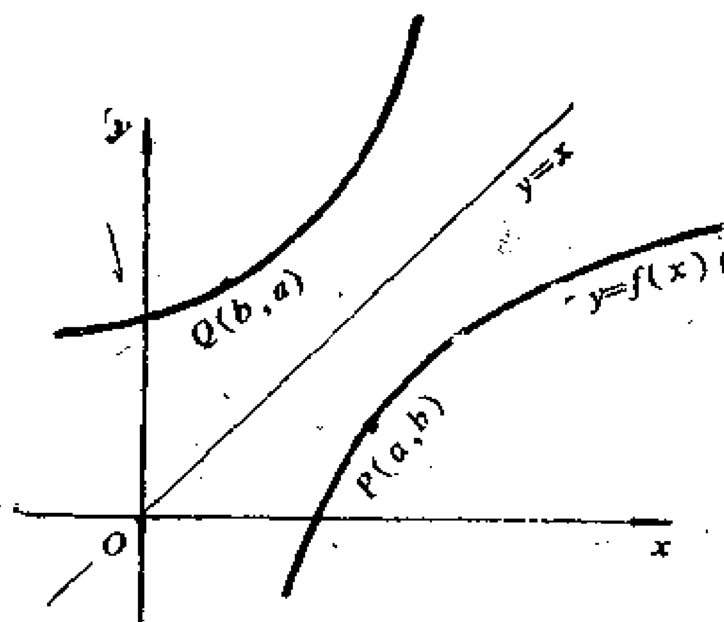


图 1-15

的一一映射. 这就证明了反函数$x=f^{-1}(y)$的存在性.

再证$x=f^{-1}(y)$是B上的单增函数. 设y_1、y_2是B上的任意两点，且$y_1<y_2$. 又设

$$x_1=f^{-1}(y_1),\quad x_2=f^{-1}(y_2)$$

对于x_1、x_2只有三种可能性：$x_1<x_2$，$x_1=x_2$，$x_1>x_2$. 由于$y=f(x)$是单增的以及$y_1<y_2$，这就排除了后两种可能性. 事实上，如果有$x_1\geqslant x_2$，则由于$y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，根据$y=f(x)$单调增的假设知必有$y_1\geqslant y_2$，这与$y_1<y_2$的前提相矛盾. 从而证得$x=f^{-1}(y)$在B上是单调增的. 证毕

例如$y=\sin x$是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的单调增函数，相对应的值域是$[-1,\ 1]$. 由定理可知，反函数$x=\arcsin y$不仅存在，而且还是$[-1,\ 1]$上的单调增函数. 又如$y=x^2$是$(-\infty,\ 0]$上的单调减函数，相对应的值域是$[0,+\infty)$，因此它的反函数一定存在（我们已经知道它的反函数是$x=-\sqrt{y}$），并且这个反函数在$[0,+\infty)$上单调减小.

§ 5 初等函数

一 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类

图 形	主要性态
$y=x$ ($\alpha=1$) $y=x^2$ ($\alpha=2$) $y=x^3$ ($\alpha=3$) $y=\frac{1}{x}$ ($\alpha=-1$) $y=x^4$, $y=x^2$, $y=\sqrt[4]{x}$ ($a>0$) $y=x^{-\frac{1}{3}}$, $y=x^{-1}$, $y=x^{-3}$ ($a<0$)	1. $a>0$时，图形过$(0,0)$及$(1,1)$两点，在$(0,+\infty)$内是增函数 2. $a<0$时，图形过$(1,1)$点，在$(0,+\infty)$内是减函数

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$

定义域：$-\infty<x<+\infty$

图形	主要性质
	1. 以2π为周期 2. 图形对称于原点 3. $\|\sin x\|\leqslant 1$

余弦函数 $y=\cos x$

定义域：$-\infty<x<+\infty$

图形	主要性质
	1. 以2π为周期 2. 图形对称于oy轴 3. $\|\cos x\|\leqslant 1$

正切函数 $y=\mathrm{tg}x$

定义域：$x\in R$，$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$，$k=0$，±1，±2，…

图　　形	主要性质
	1. 以π为周期 2. 图形对称于原点 3. 在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内单调增

余切函数：$y=\mathrm{ctg}x$

定义域：$x\in R$，$x\neq k\pi$，$k=0$，±1，±2，…

图　　形	主要性质
	1、以π为周期 2 图形对称于原点 3. 在区间$(0, \pi)$内单调减

5. 反三角函数

反正弦函数　$y=\arcsin x$或$y=\sin^{-1}x$

反余弦函数　$y=\arccos x$或$y=\cos^{-1}x$

定义域：$-1\leqslant x\leqslant+1$

图　　形	主 要 性 质
arccosx; arcsinx; $y=\mathrm{Arcsin}x$; $y=\mathrm{Arccos}x$	1. $\arcsin x$的图形对称于原点 $\arccos x$的图形对称于Ox轴 2. 主值 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$ $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ 3. $\arcsin x$单调增， $\arccos x$单调减

反正切函数　$y=\mathrm{arctg}x$或$y=\mathrm{tg}^{-1}x$

定义域：$-\infty<x<+\infty$

图　　形	主 要 性 质
	1. 图形对称于原点 2. 主值 $-\frac{\pi}{2}<\text{arctg}x<\frac{\pi}{2}$ 3. arctg$x$单调增

反余切函数　$y=\text{arcctg}x$或$y=\text{ctg}^{-1}x$

定义域：$-\infty<x<+\infty$

图　　形	主 要 性 质
	1. 图形对称于$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$点 2. 主值 $0<\text{arcctg}x<\pi$ 3. arcctg$x$单调减

二 初等函数

在自然科学及工程技术中经常遇到的函数大多是由基本初等函数构成的初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并用一个解析式表达的函数，叫做初等函数.

例如，$\ln\sin^2 x$，　$\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$，　$\dfrac{2x-1}{x^2+1}$，

$$e^{2x}\sin(3x+1),\ \cdots$$

等都是初等函数.

今后在微积分运算中常把一个初等函数分解为基本初等函数来研究，所以应当学会怎样分析初等函数的结构.

例1　已给函数 $y=\sqrt{x^3+\sin^2 x}$，试分析它的结构.

解　令　$z=x^3+\sin^2 x$，则　$y=z^{\frac{1}{2}}$. 前式的右端是两个初等函数的和，令

$$z=u(x)+v(x),\ 其中u(x)=x^3,\ v(x)=\sin^2 x,$$

这里，$u(x)=x^3$已经是基本初等函数，而$v(x)$又是一个复合函数. 令$w=\sin x$，则

$$v(x)=w^2,\ w=\sin x.$$

综上所述，这个函数的结构是

$$y=z^{\frac{1}{2}},\qquad z=u(x)+v(x),$$

$$u(x)=x^3,\ v(x)=w^2,\ w=\sin x.$$

在工程技术中也常用非初等函数. 在§3中所提到的分段函数就是其中一种. 例如在电子技术中常用的"单位阶跃函数"就是一个分段函数，这个函数的表达式是

$$f(t)=\begin{cases}0, & 当\ t\leqslant 0,\\ 1, & 当\ t>0.\end{cases}$$

它的图形如图1-16所示，

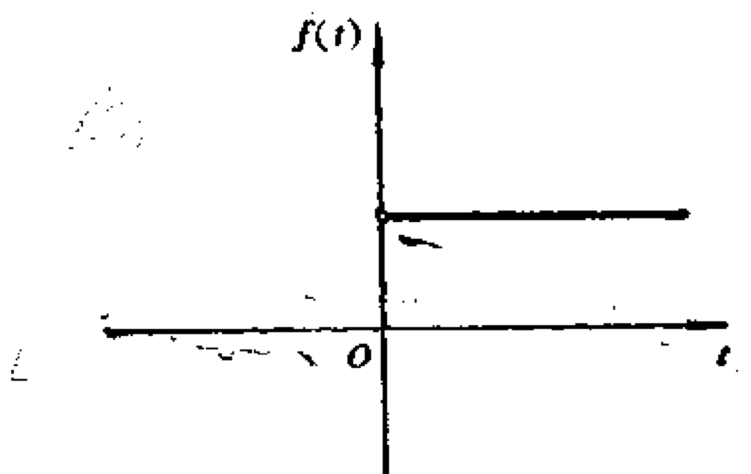


图 1-16

三　双曲函数

在工程技术中也常用一种叫做双曲函数的初等函数．它们是由e^x和e^{-x}构成的，最常用的是双曲正弦函数和双曲余弦函数．其定义如下：

双曲正弦函数

$$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

双曲余弦函数

$$\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

它们的图形很容易用"叠加法"作出来，如图1-17所示．

除此以外还有其它双曲函数：

双曲正切函数

$$\mathrm{th}\,x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$$

双曲余切函数

$$\mathrm{cth}\,x=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}};$$

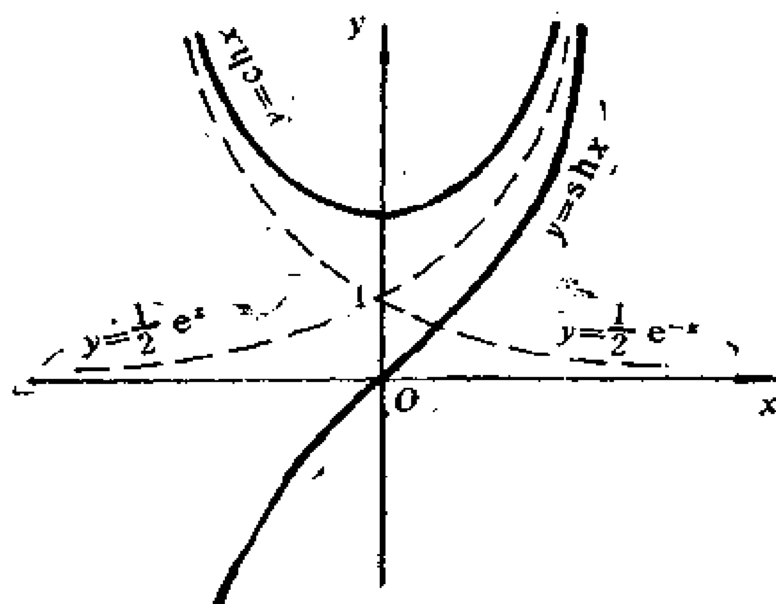


图 1-17

与三角函数相仿，双曲函数之间也有类似的公式，如

$$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x;\quad \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x;$$

$$\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th}x;\quad \operatorname{th}x=\frac{1}{\operatorname{cth}x};$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$$

等等．但是，双曲函数不是周期函数，这一点与三角函数有本质的差别．

双曲函数的反函数叫做反双曲函数．例如，可由双曲正弦函数定义反双曲正弦函数（从图形上可以看到 $y=\operatorname{sh}x$ 在整个定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 内是单调增的，因此它的反函数必存在而且也是单调增的）．由定义

$$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

有

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

由此解得

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

因为指数函数只取正值，所以

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$

即

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

这就是反双曲正弦函数的解析表达式，记为arsh y. 把 x 与 y 的位置互换就得到常用的反双曲正弦函数

$$y=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad x\in R.$$

对于双曲余弦函数，由于在其定义域（$-\infty$, $+\infty$）内，它不是单调函数，所以只能分别在它的两个单调区间（$-\infty$, 0]及[0, $+\infty$）上来讨论. 取 $x\geqslant 0$ 所对应的一支作为该函数的主值，则反双曲余弦（记为arch x）的解析表达式为

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad x\geqslant 1.$$

它在区间[1, $+\infty$）上是单调增加的.

类似地可推得反双曲正切函数（记为arth x）

$$y=\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

其定义域为开区间（-1, 1）. 它在开区间（-1, 1）内是单调增加的奇函数.

第二章 极 限

上一章我们从研究变量的相互联系出发，引出了函数的概念．本章将要进一步研究变量的变化方式，并建立变量的极限概念．极限概念是微积分学的理论基础．微积分学的主要概念都建立在极限概念之上，所以有必要对它作比较详细的研究．

本章的基本任务是给出极限的精确定义，并论证一些极限运算的基本法则．

§1 数列的极限

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的．对于这类问题，已不能在初等数学范围内通过有限步骤来获得准确结果，而必须无限次地使用原有的初等方法才可望达到目的．简言之，如果问题要涉及到“无限”次的运算，那就要归结到极限这一重要概念．

一 面积问题

平面上曲边形面积的计算，是极限概念的起源之一．例如，我国古代数学家刘徽（第三世纪），曾提出利用圆内接多边形来推算圆面积的方法——割圆术．刘徽说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．”刘徽的这种思想，正是极限思想在几何上的应用．

设有半径为R的圆．在圆内作内接正n边形（$n\geqslant 3$），其面积记为A_n．这样就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

点所对应的曲线的纵坐标：

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

把这些矩形合起来就成为图2-2所示的n级台阶形（图中阴影部分）．以n级台阶形面积作为所求面积S的近似值．用S_n代表n级台阶形面积，则

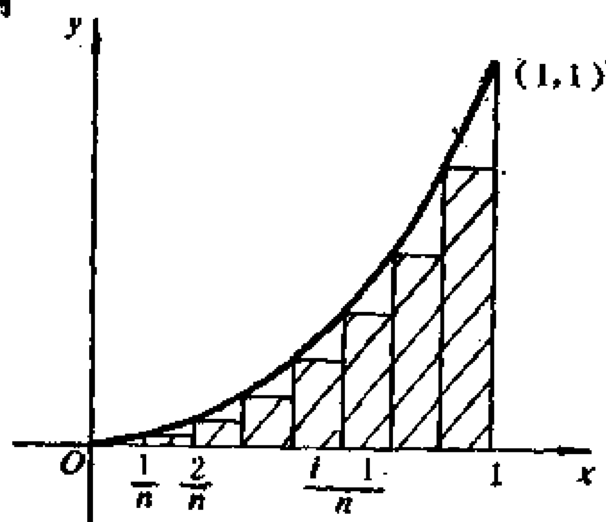


图 2-2

$$S_n=0^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right].$$

利用公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1),$$

可得

$$S_n=\frac{1}{6n^3}\left[n(n-1)(2n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

容易看出，当 n 无限增大时，S_n将无限地趋近于确定的数值$\frac{1}{3}$.

这个数值$\frac{1}{3}$就是所求的曲边形面积.

以上两例说明，极限概念的形成反映了人们在生产实践中，对客观存在的量的深入认识过程和计算这些量的方法的精确化过程. 从有限次近似值的计算，到判断所求量的精确值，是人类认识上的一个飞跃，是从有限到无限的飞跃.

从上述两个问题看，判断S_n（或A_n）当 n 无限增大时究竟与什么数值无限接近，这是目的. 但是从数学理论看，更根本的则是应该首先弄清楚什么叫做"当 n 无限增大时，S_n与某数 S 无限接近"，或者换句话说：什么叫做"当 $n\to\infty$时，S_n以 S 为极限". 对此，数学上应当有一个严格的定义. 只有这样，才能使往后的推理和判断建立在一个坚实的基础上.

二　数列的极限概念

通常把定义域为自然数集N的函数 $u_n=f(n)$叫做整标函数. 把整标函数$u_n=f(n)$的函数值依照自然数 n 的顺序排列出来的一个无穷数串

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

叫做数列（或序列），记为$\{u_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，u_n叫做通项. 数列的图形在笛卡儿直角坐标系下是一个离散点集. 例如 $f(n)=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$（$n\in N$），其图形如图 2-3 所示. 这种图形不利于观察当 $n\to\infty$时u_n的变化趋势. 所以通常将数列的图形用数轴上一系列点来表示. 如$f(n)=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，其图形如图2-4所示.

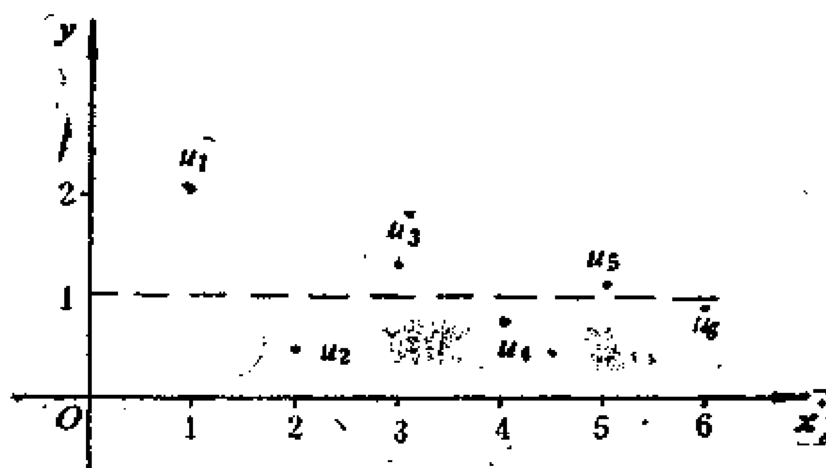


图 2-3

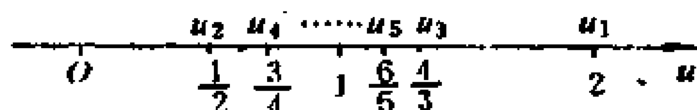


图 2-4

下面通过具体例子来分析"当 $n\to\infty$ 时，数列u_n与某个数A 无限接近"这句话的确切含义是什么．仍以$f(n)=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$为例，研究数列

$$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{6}{5},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots \qquad (1)$$

当 n 无限增大时的变化趋势．

众所周知，两个实数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b-a|$ 来度量．$|b-a|$ 越小，a 与 b 就越接近．对于数列(1)，因为

$$|u_n-1|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n} \qquad (2)$$

可见当 n 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 越来越小，从而u_n也就越来越接近于1，

这种接近过程还可以进一步数量化，把它描述得更准确些。例如给定$\frac{1}{100}$，从不等式(2)可以看到只要$n>100$就能够使$|u_n-1|<\frac{1}{100}$，即数列(1)中从第101项起的以后诸项

$$u_{101},\ u_{102},\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

所对应的点都在点1的$\frac{1}{100}$的邻域内。同样地，如果给定$\frac{1}{10000}$，则数列(1)中从第10001项起的以后的一切项都将进入点1的$\frac{1}{10000}$的邻域内。为了刻画"当n无限增大时，u_n无限接近于数A"这样一个无限的过程，照理就应当将以上这种描述方法无限次地继续下去，这当然是不可能的。要想描述出这种在自然数n的无限地运动、变化过程中，数列$\{u_n\}$也随之不断运动、变化而趋于确定数值的这种复杂过程，我们就应当像下面这样来描述：对于数列$u_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$来说，不论给定的正数$\varepsilon$多么小，总存在一个正整数$N$，使得对于满足$n>N$的一切项$u_n$，不等式

$$|u_n-1|<\varepsilon$$

都成立。从几何上看，也就是说，任意给定点1的一个ε邻域（无论ε多么小），总存在正整数N，使数列$\{u_n\}$从第$N+1$项开始的一切项

$$u_{N+1},\ u_{N+2},\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

都在点1的ε邻域内。

这样，就将一个无限的变化过程用简单的数量化的语言非常精确地描述出来了。

一般地，对于数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

有如下定义。

定义 已给数列$\{u_n\}$及常数A，若对于任意给定的正数ε，都存在着正整数N，使得对于$n>N$时的一切u_n，不等式

$$|u_n-A|<\varepsilon$$

都成立，那末就称数列$\{u_n\}$当$n\to\infty$时以数A为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A$$

或 $$u_n\to A \qquad (n\to\infty).$$

当数列$\{u_n\}$以A为极限时，也称数列$\{u_n\}$收敛于A．如果数列没有极限，称数列发散．

上面定义中正数ε可以"任意给定"，这一点很重要，因为只有这样，不等式$|u_n-A|<\varepsilon$才能表示出u_n与A无限接近的意思．此外还应当注意到：定义中的正整数N是与任意给定的正数ε有关的，它随着ε的给定而选定．

从几何意义上讲，$\{u_n\}$是u轴上的一系列的点．A是u轴上的一个定点．$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$的几何意义是：任意给定点$A$的一个$\varepsilon$邻域$U(A,\varepsilon)$，则必存在一个正整数$N$，使数列$\{u_n\}$从$u_{N+1}$起的以后的一切项

$$u_{N+1},\ u_{N+2},\ u_{N+3},\ \cdots$$

所对应的点都落在点A的ε邻域内，至多有N个点落在这个邻域以外．也就是说，无论ε如何小，除去有限项所对应的点而外，其余无穷多项所对应的点全部聚集在点A的ε邻域内（图2-5）．



图 2-5

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限．关于极限的求法，将在§3中再进行讨论．现在先举几个例题来说明极限概念．

例1 证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

的极限是1.

证明 设 $u_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 则

$$|u_n-1|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}.$$

为了使 $|u_n-1|$ 小于任意给定的正数ε，只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon},$$

就可以了. 所以，对任给的正数ε，取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

故按定义有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

证毕

例2 证明数列 $\left\{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right\}$的极限是$\frac{1}{3}$.

证明 令 $S_n=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$，则因

$$\left|S_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right|$$
$$=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)<\frac{1}{2n}.$$

所以对于任给的正数ε，只要

$$\frac{1}{2n}<\varepsilon \quad 或 \quad n>\frac{1}{2\varepsilon},$$

不等式 $\left|S_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$就必定成立. 于是取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当$n>N$时就有

$$\left|S_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)=\frac{1}{3}.$$

证毕

注意，在利用数列极限的定义来论证某个数A是数列$\{u_n\}$的极限时，重要的是对于任意给定的正数ε，要能够指出定义中所说的这种正数N确实存在，但没有必要求出最小的N. 如果知道$|u_n-A|$小于某个量$\varphi(n)$，那末当$\varphi(n)<\varepsilon$时，$|u_n-A|<\varepsilon$当然也成立. 如果用"$\varphi(n)<\varepsilon$"这个式子来定出N比较方便的话，就可以采用这种方法. 例 2 便是这样做的.

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0 \quad (|q|<1)$.

证明 任给$\varepsilon>0$，因为

$$|q^n-0|=|q|^n,$$

要使$|q^n-0|<\varepsilon$，只要

$$|q|^n<\varepsilon \quad 或 \quad n\ln|q|<\ln\varepsilon$$

即可．因为$|q|<1$，所以$\ln|q|<0$，上式等价于

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

不妨设$\varepsilon<1$，只要取$N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当$n>N$时就有

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0 \qquad (|q|<1). \qquad \text{证毕}$$

例4 设a为正的实常数．证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0$．

证明 任给$\varepsilon>0$，要使$\left|\left(\frac{a}{n}\right)^n-0\right|<\varepsilon$．因为$a$是正的实常数，所以一定存在正整数$N_1$，使当$n>N_1$时，$0<\frac{a}{n}<1$，在这时就有

$$\left|\left(\frac{a}{n}\right)^n-0\right|<\frac{a}{n}$$

成立．于是当$n>N_1$时，只要

$$\frac{a}{n}<\varepsilon \quad \text{或} \quad n>\frac{a}{\varepsilon},$$

不等式$\left|\left(\frac{a}{n}\right)^n-0\right|<\varepsilon$就必定成立．所以取正整数$N=\max\left(N_1, \left[\frac{a}{\varepsilon}\right]\right)$，则当$n>N$时，就有

$$\left|\left(\frac{a}{n}\right)^n-0\right|<\varepsilon$$

成立．即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0. \qquad \text{证毕}$$

下面两个有关收敛数列性质的定理，对判断一个数列是否收敛有很重要的作用．

定理1 （极限的唯一性） 若数列$\{u_n\}$有极限存在，则其极限值是唯一的．

证明 用反证法．设极限不唯一，若同时有$u_n\to a$及$u_n\to b$（$n\to\infty$）成立，且$a<b$．

今给定$\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，故存在正整数$N_1$，当$n>N_1$时恒有

$$|u_n-a|<\frac{b-a}{2}，即\frac{3a-b}{2}<u_n<\frac{b+a}{2} \qquad (3)$$

成立，同理因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=b$，故又存在正整数$N_2$，当$n>N_2$时恒有

$$|u_n-b|<\frac{b-a}{2}，即\frac{b+a}{2}<u_n<\frac{3b-a}{2} \qquad (4)$$

成立．取$N=\max(N_1, N_2)$，则当$n>N$时，（3）式及（4）式同时成立．但由（3）式有$u_n<\frac{b+a}{2}$，由（4）式有$u_n>\frac{b+a}{2}$．这一矛盾证明了本定理结论的正确性．　　证毕

例5 证明数列$\{u_n\}=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}$没有极限．

证明 考察所给数列可知：当n取奇数$2m-1$（$m\in N$）而无限增大时u_{2m-1}从$u_1=-\frac{1}{2}$开始单调减少．当n取偶数$2m$（$m\in$

定义，对于$\varepsilon=1$必存在正整数N，当$n>N$时恒有$|u_n-a|<1$成立．于是当$n>N$时就有

$$|u_n|=|u_n-a+a|\leqslant|u_n-a|+|a|<1+|a|$$

取$M=\max\{|u_1|, |u_2|, \cdots, |u_N|, 1+|a|\}$，那末对数列$\{u_n\}$中的一切项都有不等式

$$|u_n|\leqslant M$$

成立．因此数列$\{u_n\}$是有界的． 证毕

根据定理2可知，如果数列$\{u_n\}$无界，那末该数列一定是发散的．但是，如果数列$\{u_n\}$有界，却不能断定它一定收敛．本节例5就是这种例子．显然数列$\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$是有界的（可取$M=1$），但这个数列没有极限．所以数列有界只是数列收敛的必要条件，而不是充分条件．

§2　函数的极限

上一节给出了数列极限的定义，因为数列$\{u_n\}$可以看作自变量为正整数n的整标函数：$u_n=f(n)$，所以数列的极限也是函数极限的一种类型，即当自变量n取正整数而无限增大（$n\to\infty$）时函数$u_n=f(n)$的极限．本节要介绍函数极限的其它几种类型．对连续自变量函数$y=f(x)$（即定义域为某些区间的函数），要研究当x无限趋近于某个定值x_0（$x\neq x_0$）时，函数$f(x)$的变化趋势，以及当$|x|$无限增大时（假定这时函数有定义）函数$f(x)$的变化趋势．

一　自变量趋向有限值时函数的极限

为了使这种类型的极限问题更便于理解，先看下例．

例1　自由落体运动的瞬时速度问题．

自由落体的运动方程是

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

求物体在时刻$t_0=2$ s时的瞬时速度.

初等算法只能算平均速度. 用由$t_0=2$ s到时刻t这段时间的平均速度作为在$t_0=2$ s时的瞬时速度的近似值.

在$t_0=2$ s的那一时刻，物体的位置是$s(2)=2g$. 由$t_0=2$ s到时刻t（或者由时刻t_0上溯一段时间到时刻t）这段时程$(t-2)$（或$(2-t)$）内，位移量是

$$s(t)-s(2)=\frac{1}{2}gt^2-2g=\frac{g}{2}(t^2-4),\quad (t>2)$$

$$\left(\text{或}\quad s(2)-s(t)=\frac{g}{2}(4-t^2),\ (t<2)\right).$$

平均速度$\overline{v}(t)$（它显然是t的一个函数）是

$$\overline{v}(t)=\frac{s(t)-s(2)}{t-2}=\frac{1}{t-2}\left(\frac{1}{2}gt^2-2g\right)$$

$$=\frac{g(t^2-4)}{2(t-2)},\qquad (t\neq 2).$$

当时间段$|t-2|$越短，$\overline{v}$就越接近于$t=2$s时的瞬时速度. 所以当t无限地接近于2 s时，如果$\overline{v}(t)$有确定的变化趋势，即无限接近一个确定的数值，那末这个数值就应当是$t=2$ s时的瞬时速度的精确值. 分析上式可以看出这个确定的数是$2g$，因此$t=2$s时的瞬时速度是$2g$.

上述例子告诉我们：求自由落体运动在时刻$t_0=2$ s时的瞬时速度问题，实际上是要研究当t无限趋近于2 s时（以$t\to 2$来表示）平均速度$\overline{v}(t)$这个函数是否能与某个数值无限接近，如果是这样，那末这个数值就是$t_0=2$ s时的瞬时速度（这个数值在数学上就叫做当$t\to 2$时函数$\overline{v}(t)$的极限）. 应当注意到：在研究过

程中，让t无限趋近于2，但是t不能等于2．因为$t=2$时，所谓的平均速度也就没有意义了．也就是说，研究$t\to 2$时$\overline{v}(t)$的变化趋势如何，与函数$\overline{v}(t)$在$t=2$时有没有定义是毫无关系的．

把以上讨论的问题抽象到一般则是，如果函数$f(x)$在x_0点的某个去心邻域内有定义（在x_0点函数$f(x)$可以没有定义），我们要研究当x无限趋近于x_0时（以$x\to x_0$来表示）函数$f(x)$有没有一个确定的变化趋势——即与某个定数A无限接近。为此，就应当象讨论数列极限那样，首先把“当$x\to x_0$时，$f(x)$无限地接近于常数A”这句话给予精确化．现在仍用例1来说明．所谓当$t\to 2$时，$\overline{v}(t)$无限趋于定数$2g$，就是说：只要$|t-2|$充分小($t\neq 2$)，就可以使$|\overline{v}(t)-2g|$也充分小．比方说要使$|\overline{v}(t)-2g|<0.0001$，由于当$t\neq 2$时有

$$|\overline{v}(t)-2g|=\left|\frac{\frac{g}{2}(t^2-4)}{t-2}-2g\right|$$

$$=\frac{g}{2}|t-2|,$$

因此只要时间t满足不等式

$$0<|t-2|<\frac{2}{g}\times 0.0001,$$

就能使$|\overline{v}(t)-2g|<0.0001$成立．同样要使$|\overline{v}(t)-2g|<10^{-8}$，则只要$t$满足不等式

$$0<|t-2|<\frac{2}{g}\times 10^{-8}$$

就能办到．为了刻画当t“无限”趋近于2时$\overline{v}(t)$“无限”趋于常数$2g$这一个“无限”的过程，就应当仿照数列极限那样的描述方法：任给一个无论多么小的正数ε，都能找到一个很小的正数δ，对

满足不等式$0<|t-2|<\delta$的一切t值，不等式$|v(t)-2g|<\varepsilon$都能成立。

下面给出当x趋于x_0时函数$f(x)$以常数A为极限的定义。

定义 设函数$f(x)$在x_0点的某个去心邻域内有定义（$f(x)$在x_0点可以没有定义），A为一常数。若对于任给的正数ε，都存在正数δ，使适合不等式

$$0<|x-x_0|<\delta$$

的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称A为$f(x)$当x趋于x_0时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当x\to x_0).$$

当$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在时也称$f(x)$在$x_0$点有极限。

和数列极限相仿，完全类似地可以证明：若函数在x_0点极限存在，则这个极限值必是唯一的。

函数$f(x)$当$x\to x_0$时以数A为极限可以作如下的几何解释：任意给定一个正数ε，作平行于x轴的两条直线$y=A+\varepsilon$及$y=A-\varepsilon$，介于这两条直线之间是一横条区域。根据定义，对于给定的ε，存在着一个x_0的δ邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，当$y=f(x)$的图形上的点的横坐标x在邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内，但$x\neq x_0$时，这些点的纵坐标$f(x)$恒满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad 或 \quad A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

即这些点总是落在上面所作的横条区域内（图2-7）。

例2 证明$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$，其中$C$为常数。

例3 证明$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

例2、例3的证明留给读者作为练习。

例4 证明$\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$。

证明 要证明的是对任给的$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，当$0<|x-2|$

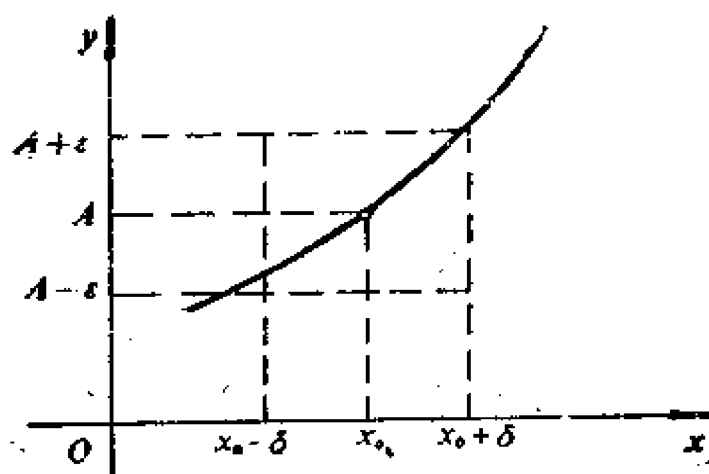


图 2-7

$<\delta$时，恒有$|(2x-1)-3|<\varepsilon$成立.

由于

$$|(2x-1)-3|=|2x-4|=2|x-2|,$$

所以对任给的$\varepsilon>0$，只须取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$0<|x-2|<\delta$时，

即当$0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$时，必有

$$|(2x-1)-3|<\varepsilon.$$

故由定义有 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$. 证毕

例 5 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$.

证明 任意给定正数ε，因为

$$|f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=\left|\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}|x-2|,$$

所以，要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$|x-2|<\sqrt{2}\varepsilon$且$x$不取负值（因为$f(x)=\sqrt{x}$的定义域是$x\geqslant 0$）. 取$\delta=\min(2,\sqrt{2}\varepsilon)$，

则当x满足不等式$0<|x-2|<\delta$时，就有

$$|\sqrt{x}-2|<\varepsilon$$

成立．按定义即得证 $\lim_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$。 证毕

例6 证明$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

证明 因为

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|.$$

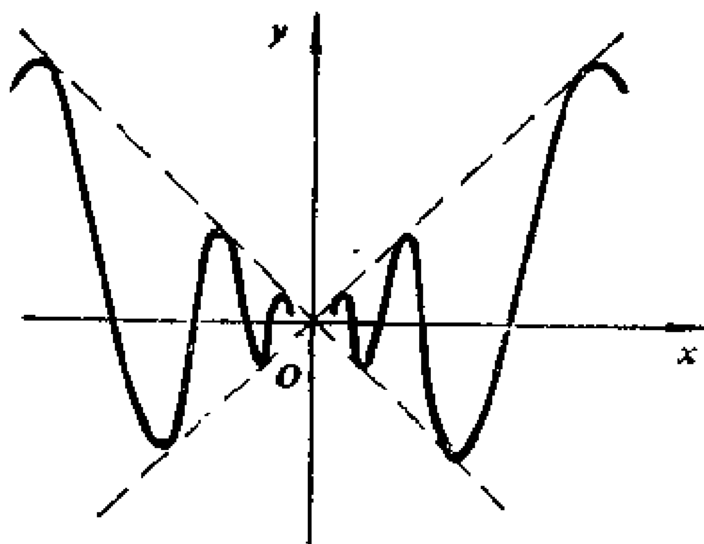


图 2-8

所以，对任给的$\varepsilon>0$，只须取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x|<\delta$时必有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

证毕

上面我们所考虑的极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，其中$x$趋近于$x_0$的方式是任意的，它可以从$x_0$的左边（$x<x_0$）趋于$x_0$，也可以从$x_0$的右边（$x>x_0$）趋于$x_0$。但对于某些函数有时只能或只需考虑"单侧极限"，即函数$f(x)$当x仅从x_0点的左侧趋向于x_0（记作$x\to x_0-0$或$x\to x_0^-$）时的极限；或x仅从x_0点的右侧趋向于x_0（记作$x\to x_0+0$或$x\to x_0^+$）时的极限。在$x\to x_0-0$的情形，由于这时$x<x_0$，所以只须在上述定义中，把$0<|x-x_0|<\delta$改为：$x_0-\delta<x<x_0$，其它不变，这时数A就叫做函数$f(x)$当x趋近于x_0时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,\ 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

类似地，在$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的定义中，把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0<x<x_0+\delta$，这时$A$就叫做函数$f(x)$当$x$趋于$x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,\ 或 \quad f(x_0+0)=A.$$

根据左、右极限定义，很容易证明下述定理。

定理1 函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是函数在该点的左、右极限都存在且相等，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

定理的证明留给读者作为练习。分别研究左、右极限是研究极限的常用方法。如果一个单侧极限不存在，或左、右极限都存在，但不相等，则可断言该点处极限不存在。

例7 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant 2, \\ \sqrt{x}, & x>2 \end{cases}$$

当$x\to 2$时$f(x)$的极限不存在。

证明 函数$f(x)$在$x_0=2$点处的右极限（见例5）是

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x}=\sqrt{2}.$$

易证函数$f(x)$在$x_0=2$点处的左极限是

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2-x)=0.$$

因为左极限、右极限存在但不相等，所以$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$不存在(图2-9)。

证毕

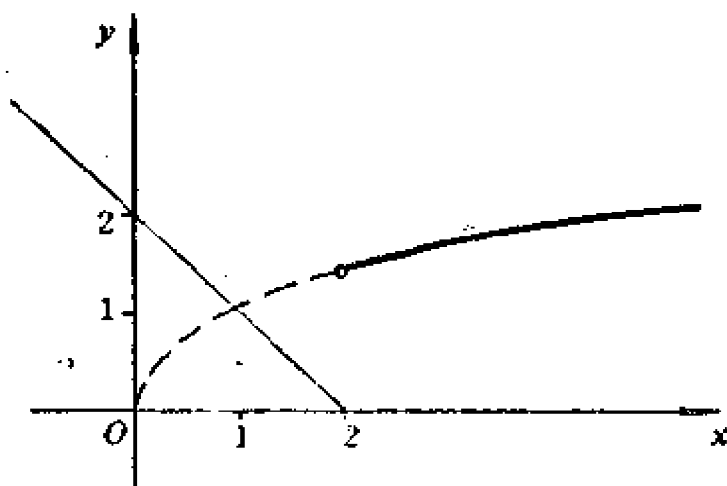


图 2-9

二　自变量趋向无穷时函数的极限

x的绝对值无限变大叫做x趋向无穷，记作$x\to\infty$. 整标函数的极限可以看作是$x\to\infty$时函数极限的特殊情况. 仿照定义整标函数极限的方法，可以给出$x\to\infty$时函数的极限定义.

定义　设函数$f(x)$在$|x|$充分大时有定义，又A为一常数，如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正数N，使得适合不等式$|x|>N$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那末常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当x\to\infty).$$

如果在定义中只考虑x取正(负)值趋向无穷，则极限记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x)=A).$$

并称A为$f(x)$当x趋向正无穷（负无穷）时的极限．容易证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 与 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A,$$

同时成立．

从几何图形来看，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的意思是：作直线$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$，则总有一个正数$N$存在，使得当$x<-N$或$x>N$时，函数$y=f(x)$的图形总是位于这两条直线之间（图2-10）．

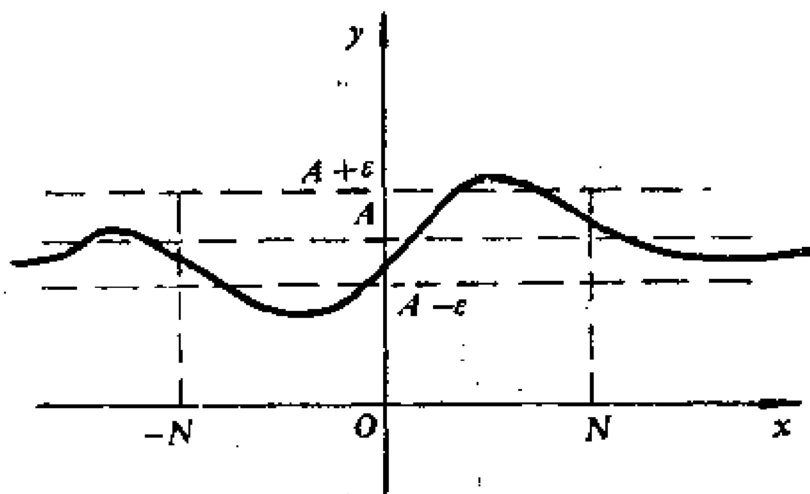


图 2-10

例7 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

证明 任给$\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$，只须$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以如果取$N=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当$|x|>N$时就有不等式$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$成立．故按定义有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,. \qquad \text{证毕}$$

从图形上看，直线$y=0$是函数$y=\dfrac{1}{x}$的图形的水平渐近线

为极限的变量. 任何一个不为零的常数都不是无穷小量. 但零是可以作为无穷小量的唯一常数，因为若$f(x)\equiv 0$，那末对于任意给定的$\varepsilon>0$总有$|f(x)|<\varepsilon$成立.

2 无穷大量 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，就说函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时是无穷大量，简称无穷大，精确地说，就是：

定义 若对于任意给定的正数M(无论它多么大)，总存在正数δ(或正数N)，使适合不等式

$$0<|x-x_0|<\delta\ (\text{或}\ |x|>N)$$

的一切x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷大量或无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

如果在上述定义中，把$|f(x)|>M$换成$f(x)>M$(或$f(x)<-M$)，则称函数为正无穷大(或负无穷大)，并记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty).$$

必须注意，函数当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时是无穷大量，按通常的意义说极限是不存在的. 现在只是借用了极限的记号写成$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$. 有时为了方便把它说成"极限是无穷大"，但这并不意味着函数$f(x)$的极限存在.

例9 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证明 任意给定正数M，要使

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$

只要

$$0<|x-1|<\frac{1}{M},$$

所以，取 $\delta=\frac{1}{M}$，则对于适合不等式 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 的一切 x 均有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$（图2-11）. 证毕

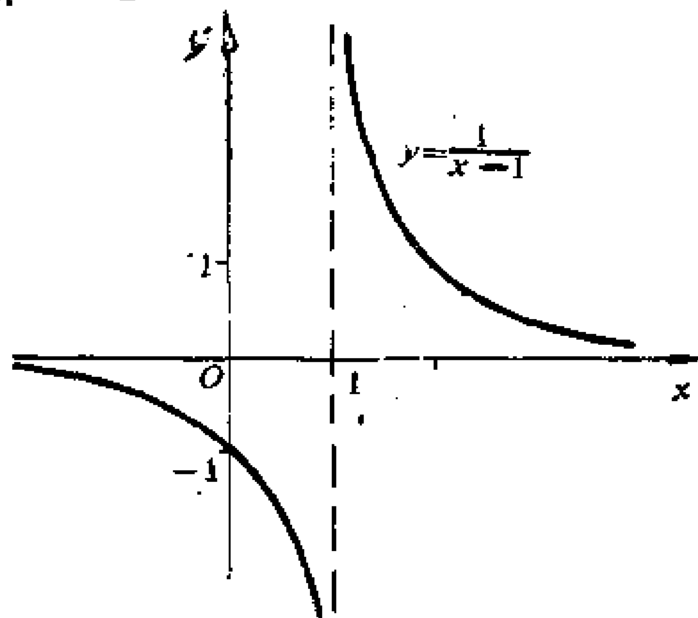


图 2-11

从几何上来看，直线 $x=1$ 是函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 图形的铅直渐近线. 一般地说，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 就是函数 $y=f(x)$ 图形的铅直渐近线.

应当注意，根据定义可知，无穷大一定是无界函数，但无界函数却不一定是无穷大.

例10 证明 $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是无界函数，但当 x

$\to +\infty$时$f(x)$不是无穷大.

证明 任给正数M，可取正整数n充分大，使$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M$，于是有$|f(x_n)| = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M$. 因此函数$f(x)$在$(0, +\infty)$内是无界函数.

下面证明当$x \to +\infty$时$f(x)$不是无穷大. 今给定正数$M = 1$，则无论正数N多么大，取$x_n = n\pi$，显然当$n > N$时，$x_n > N$，而这时

$$|f(x_n)| = |n\pi \sin n\pi| = 0 < M,$$

所以当$x \to +\infty$时$f(x) = x\sin x$不是无穷大(图2-12).

证毕

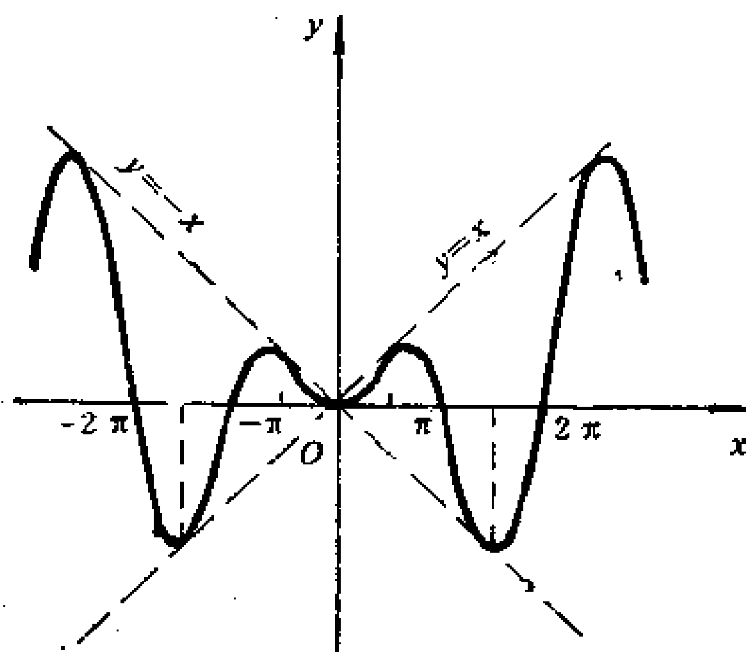


图 2-12

3 无穷小量与无穷大量的关系 无穷小与无穷大之间的关系有以下定理.

定理 2 如果当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时函数$f(x)$是无穷大，则

$\frac{1}{f(x)}$是无穷小；若$f(x)$是无穷小且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

证明 仅就$x\to x_0$的情形给予证明. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. 任给$\varepsilon>0$，对于$M=\frac{1}{\varepsilon}$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon}\quad 即\quad \left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以当$x\to x_0$时，$\frac{1}{f(x)}$是无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且$f(x)\neq 0$.

任意给定$M>0$，根据定义，对$\varepsilon=\frac{1}{M}$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于$f(x)\neq 0$，从而有

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M$$

所以当$x\to x_0$时$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

证毕

四 海涅(Heine)定理

前面介绍了数列的极限，本节又介绍了连续自变量函数的极限及两种特殊变量——无穷小和无穷大. 可以看到，它们的概念在实质上是相同的，只是自变量的取值范围不同罢了. 数列的极限和连续自变量函数极限之间的密切关系可以用下面定理概括.

定理3 海涅(Heine)定理 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在的充分必要条件

是：对任选数列$\{x_n|x_n\to x_0,\ x_n\neq x_0\}$(或$x_n\to\infty$)，其所对应的数列$\{f(x_n)\}$有同一极限.

证明* 仅就$x\to x_0$的情形来证. 先证必要性. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，要证明对任何一个以$x_0$为极限的数列$x_n(x_n\neq x_0)$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 由于当$x\to x_0$时，$f(x)$以数$A$为极限，根据定义，任意给定$\varepsilon>0$，必存在正数$\delta$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 又因为$x_n\to x_0(n\to\infty)$，所以对正数$\delta$，必存在正整数$N$，当$n>N$时有$0<|x_n-x_0|<\delta$成立，于是当$n>N$时就有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

充分性. 若任给一个以x_0为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，数列$\{f(x_n)\}$都有同一极限A，即：$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，要证明这时一定有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 用反证法，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$，那末一定有正数$\varepsilon_0$存在，无论正数$\delta$多么小，总存在$x'$满足不等式$0<|x'-x_0|<\delta$，而使$|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0$. 今分别取$\delta$为$1$，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{n}$，…，则可对应地得到一个点列$x_1'$，$x_2'$，…，$x_n'$，…，它们满足：

$$0<|x_1'-x_0|<1,\quad |f(x_1')-A|\geqslant\varepsilon_0,$$

$$0<|x_2'-x_0|<\frac{1}{2},\quad |f(x_2')-A|\geqslant\varepsilon_0,$$

. . . .

$$0<|x_n'-x_0|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n')-A|\geqslant\varepsilon_0,$$

这说明对所求得的数列$\{x_n'\}$满足$x_n'\to x_0$且$x_n'\neq x_0$的条件，但$\{f(x_n')\}$不以A为极限. 这与定理的假设矛盾. 所以一定有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 证毕

海涅以此充分必要条件作为函数极限的定义，所以又名极限的海涅定义. 在证明函数极限不存在时，用这个定理往往非常方便.

例11 证明当$x\to 0$时，$\sin\frac{1}{x}$无极限.

证明 取$x_n=\frac{1}{n\pi}$，当$n\to\infty$时$x_n\to 0$，且$x_n\neq 0$，这时

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

再取$x_n'=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，当$n\to\infty$时，$x_n'\to 0$，且$x_n'\neq 0$，这时

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

由海涅定理可知$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在(图2-13). 证毕

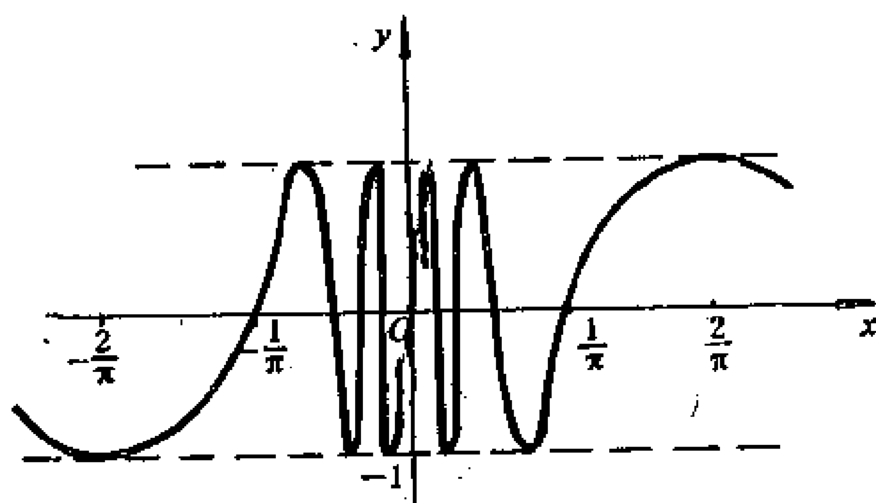


图 2-13

定理3也完全适用于$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$的情形，与定理3完全类似地可以证明：

定理4 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$的充分必要条件是：对任选数列$\{x_n|x_n\to x_0,\ x_n\neq x_0\}$(或$x_n\to\infty$)，其所对应的数列$\{f(x_n)\}$均有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

由于定理 4 的证明和定理 3 完全类似，它的证明从略．利用定理 4 来证明本节例10可以更为简明，读者不妨一试．

作为定理3、4的特例可以推出整标函数（数列）$f(n)$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在（或为无穷大）的充分必要条件是：对任何一个由自然数所构成的数列$\{n_k\}$：

$$1\leqslant n_1<n_2<n_3\cdots<n_k<\cdots,$$

$f(n_k)$（通常称数列$\{f(n_k)\}$为数列$\{f(n)\}$的子列）当$k\to\infty$ 时有相同的极限（或为无穷大）．

用这一充分必要条件可以使§ 1 中例 5 的证明大大简化．

§ 3　函数极限的性质与运算

一　极限与函数值的关系

定理 1　（同号性定理）若函数$f(x)$在$x\to x_0$时以数A为极限，且$A>0$（或$A<0$），则必存在x_0点的一个去心邻域，对其中一切x值均有$f(x)>0$（或<0）．

证明　已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$，则根据定义，当给定$\varepsilon=A>0$时，必存在正数$\delta$，使适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$值所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon=A\quad 即\quad 0<f(x)<2A.$$

因此，当$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$而$x\neq x_0$时，就有$f(x)>0$．

$A<0$ 的情形留给读者自己证明．　　　　证毕

根据定理 1 用反证法可以推得：

定理 2　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在$x_0$点的某个去心邻域内恒有$f(x)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$），则必有$A\geqslant 0$（或$\leqslant 0$）．

建议读者举例说明：若$f(x)>0$（或<0）时其极限值可以是 0．所以要注意不可仅凭$f(x)>0$（或<0）就断定其极限大于零（或小于零）．

在以上两个定理中，把“$x \to x_0$”换成“$x \to \infty$”，定理也同样成立．读者试自行把定理叙述出来，作为本段的补充．

在§1中曾经证明了有极限的数列一定是有界的．对函数的极限这个结论也同样成立．

定理3 （有界性定理）若当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时，函数以数A为极限，则在x_0点的某个去心邻域内（或当$|x|$大于某个正数N时）函数必有界．

证明 只证$x \to x_0$的情形．已知$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$．根据定义，给定$\varepsilon = 1$，则必有正数$\delta$存在，使适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < 1 \quad 即 \quad A - 1 < f(x) < A + 1$$

即当$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$而$x \neq x_0$时，对应的函数值$f(x)$以$A + 1$为上界，以$A - 1$为下界． 证毕

二 函数极限与无穷小的关系

函数以某个常数为极限，那末它们之间的差就是无穷小．反之，若当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时，函数$f(x)$与常数A之差是无穷小，那末当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时，$f(x)$一定是以常数A为极限．这个事实是以后经常要用的结论．现在把它们归结为如下两个定理．

定理4 若函数$f(x)$以常数A为极限，则$f(x)$等于数A与某个无穷小$\alpha(x)$的和，即是说，如果$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$，那末$f(x)$可以表示为：

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{其中} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0.$$

证明 只证$x \to x_0$的情形．因为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，根据定义，任给$\varepsilon > 0$，必有$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$．令

$$\alpha(x) = f(x) - A,$$

则此时就有$|\alpha(x)| < \varepsilon$，即$\alpha(x) \to 0\ (x \to x_0)$．所以这时可将$f(x)$

写作

$$f(x)=A+\alpha(x),\ \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\,.$$ 证毕

定理5 若函数$f(x)$等于常数A与一个无穷小$\alpha(x)$之和，则此函数$f(x)$以A为极限．即是说，如果$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，那末就有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\,.$$

证明 只证$x\to x_0$的情形．因为$f(x)=A+\alpha(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，所以任给$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时$|\alpha(x)|<\varepsilon$，由于$\alpha(x)=f(x)-A$，上式即

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

按定义就有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$． 证毕

可以把这两个定理总括为

定理8 以极限不为零的函数$f(x)$除无穷小$\alpha(x)$所得的商$\frac{\alpha(x)}{f(x)}$是无穷小.

证明 只证$x\to x_0$的情形．若能证明极限不为零的函数$f(x)$的倒数$\frac{1}{f(x)}$有界，则根据定理7即可证得本定理.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，由极限定义，若给定$\varepsilon=\frac{|A|}{2}>0$，则必存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时恒有$|f(x)-A|<\frac{|A|}{2}$. 由于$|f(x)-A|\geqslant|A|-|f(x)|$，因而这时就有

$$|A|-|f(x)|\leqslant|f(x)-A|<\frac{|A|}{2}.$$

即当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)|\geqslant\frac{|A|}{2}>0$成立，从而有

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|\leqslant\frac{2}{|A|}$$

成立．所以当$0<|x-x_0|<\delta$时$\frac{1}{f(x)}$有界.　　　　证毕

四　极限的四则运算定理

在以下各定理中，函数的自变量或者同是$x\to x_0$或者同是$x\to\infty$，不再一一注明.

定理9 如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$存在，且

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x).$$

证明 因$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，由本节定理4有

$$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta,$$

其中α、β为无穷小．于是

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta).$$

由定理 6，$\alpha\pm\beta$ 也是无穷小，再由本节定理 5 可知

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$ 证毕

本定理显然可以推广到有限个函数的情形.

定理10 如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$. 则$\lim[f(x)g(x)]$存在，且

$$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

这个定理的证明，建议读者作为练习. 定理10也可以推广到有限个函数相乘的情形.

推论1 如果$\lim f(x)$存在，而C为常数，则

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x).$$

推论2 如果$\lim f(x)$存在，而n是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

定理11 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，且 $B\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

证明 由$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，有

$$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta,$$

其中α，β为无穷小. 于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

分母的极限是$B^2 \neq 0$，根据定理8知此分式是无穷小，再根据定理5就得到

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

证毕

定理12 如果$f(x) \geqslant g(x)$，而$\lim f(x) = a$，$\lim g(x) = b$，那末必有$a \geqslant b$.

证明 命 $F(x) = f(x) - g(x)$，则$F(x) \geqslant 0$．由本节定理9有

$$\lim F(x) = \lim[f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x) = a - b.$$

由本节定理2知必有$a - b \geqslant 0$，即$a \geqslant b$.

证毕

最后，请读者注意：由于整标函数的极限，可以看成$x \to +\infty$时的一种特殊情形（取正整数的无限增大），因此本节所有的定理及推论对数列的极限也是成立的.

例1 求 $\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1)$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 1} 2x = 2\lim\limits_{x \to 1} x = 2 \cdot 1 = 2$,

$$\lim_{x \to 1} 1 = 1$$

都存在，所以

$$\lim_{x \to 1}(2x - 1) = \lim_{x \to 1} 2x - \lim_{x \to 1} 1 = 2 - 1 = 1.$$

例2 求 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 4}{3x^2 + 2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to -1}(2x^2 + x - 4) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 4 = -3$,

$$\lim_{x \to -1}(3x^2 + 2) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 = 5 \neq 0,$$

所以

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-4}{3x^2+2}=-\frac{3}{5}.$$

从上面的例子看来，求有理整函数（多项式）当$x\to x_0$时的极限，只要用x_0代替函数中的x就行了. 对于有理分式函数（即两个多项式之商所成的函数），只要分母在$x=x_0$时不为零，这种作法也是对的. 事实上（m，n为正整数），

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\&=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots\lim_{x\to x_0}a_n\\&=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

当　$b_0x_0^m+b_1x_0^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x_0+b_m\neq0$时，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)}{\lim\limits_{x\to x_0}(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m)}\\&=\frac{a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x_0^{m-1}+b_1x_0^{m-1}+\cdots+b_m}.\end{aligned}$$

若用$R(x)$代表有理分式函数（简称有理函数），则当其分母在x_0点不为零时（即当x_0为$R(x)$定义域内的点时），就有$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=R(x_0)$. 如果它的分母在$x_0$点为零，那就要用其它方法研究.

例3　求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

解　分子分母的极限同为零，当$x\neq2$时，

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-1}{x-3},$$

因为求$x\to 2$时的极限时$x\neq 2$，所以有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-3}=\frac{2-1}{2-3}=-1 .$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，而 $\lim(x^2+1)=2\neq 0$，

不能应用商的极限运算法则．但因

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+1}=0 ,$$

根据无穷小与无穷大的关系定理（§ 2 定理 2）可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\infty .$$

如果两个分式都是无穷大，欲求其和(或差)的极限，一般都要先通分化简再求解．

例5 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$.

解 因为当$x\neq 1$时

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}$$

$$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1} ,$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2} .$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+2x-3}$.

解 先用x^3去除分子及分母，并注意到$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+2x-3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-4\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^3}}{7+2\cdot\frac{1}{x^2}-3\cdot\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{3}{7}.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 先用x^3除分子和分母，再取极限得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}$$

$$=\frac{0}{2}=0.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解 应用例7的结果，根据无穷小与无穷大的关系定理即得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

归纳例6、7、8可推得一般情形：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n=m, \\ 0, & \text{当} m>n, \\ \infty, & \text{当} m<n. \end{cases}
$$

其中$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$．m，n为非负整数.

例9 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 当$x\to\infty$时，分子分母极限都不存在，所以不能用商的极限运算法则．把$\dfrac{\sin x}{x}$看作是$\sin x$与$\dfrac{1}{x}$的乘积，因$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小，而$\sin x$是有界函数，所以由本节定理7有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0.$$

注意当$x\to\infty$时，$\sin x$极限不存在，所以本题也不能用乘积的极限运算法则.

§4 极限存在的准则及两个重要极限

下面给出判定极限存在的两个准则，作为这两个准则应用的例子，讨论两个重要的极限.

一 夹挤准则

定理1 若在x_0点的某个去心邻域内（或在$|x|>M$时）有不等式

$$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$$

成立，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} F(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} G(x)=A,$$

则当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，$f(x)$的极限存在且等于A.

证明 只证$x\to x_0$的情形．因为当$x\to x_0$时有$F(x)\to A$，$G(x)\to A$，故对任给$\varepsilon>0$，必存在$\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，恒有$|F(x)-A|<\varepsilon$；也必存在$\delta_2>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，恒有$|G(x)-A|<\varepsilon$．若取$\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时必有$|F(x)-A|<\varepsilon$，$|G(x)-A|<\varepsilon$同时成立，即同时有

$$A-\varepsilon<F(x)<A+\varepsilon,$$
$$A-\varepsilon<G(x)<A+\varepsilon$$

成立．不妨认为δ已足够小，当$0<|x-x_0|<\delta$时不等式：$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$已经成立，于是有

$$A-\varepsilon<F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)<A+\varepsilon,$$

即当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立．故

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

证毕

应用这个准则的时候要先知道函数$f(x)$介于哪两个有同一极限的函数之间，在简单的情况下，这可以通过对问题的分析得到．

例1 证明$\lim\limits_{\alpha\to 0}\sin\alpha=0$及$\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$.

证明 先证明$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\sin\alpha=0$．在单位圆里，圆心角$\alpha$所对的圆弧之长也是$\alpha$，而$\sin\alpha$是圆心角$2\alpha$所对的弦长的一半(图2-14)．由图形可见，当$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时

$$0<\sin\alpha<\alpha.$$

由夹挤准则知$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\sin\alpha=0$．当$\alpha<0$时，令$t=-\alpha$，则当$\alpha\to 0^-$时，$t\to 0^+$，于是有

$$\lim_{\alpha\to 0^-}\sin\alpha=\lim_{t\to 0^+}\sin(-t)=-\lim_{t\to 0^+}\sin t=0,$$

因此有

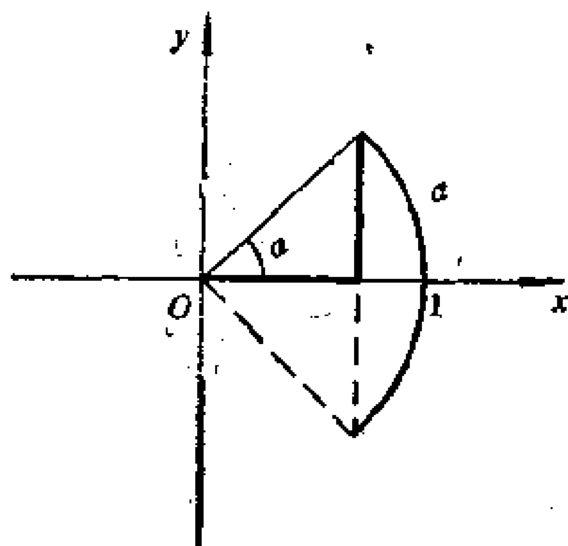


图 2-14

图 2-15

$$\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=0\ .$$

再由图2-14中直角三角形的三边关系可见

$$1-\sin\alpha<\cos\alpha<1$$

而

$$\lim_{\alpha\to 0}(1-\sin\alpha)=1-\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=1,$$

故由夹挤准则得

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1.$$

证毕

下面利用夹挤准则和以上结果来证明：当α以弧度为单位时，有以下的重要极限

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\ . \qquad (4.1)$$

证明 显然函数$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$对于一切$\alpha\neq 0$都有定义. 在图2-15所示的单位圆中，设圆心角$\angle AOB=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，点$A$处的切线与$OB$的延长线相交于$D$，又$BC\perp OA$，则

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

二 单调有界准则

如果数列$\{u_n\}$满足条件
$$u_1\leqslant u_2\leqslant u_3\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots, \tag{1}$$
就称这个数列是单调增加的；如果数列$\{u_n\}$满足条件
$$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots\geqslant u_n\geqslant\cdots, \tag{2}$$
就称这个数列是单调减少的．单调增加和单调减少的数列统称为单调数列．

如果在上面的(1)、(2)两式中等号都不成立，就称这个数列是严格单调增加或严格单调减少的．在(1)、(2)两式中可能有等号成立的单调数列也可以叫做广义的单调数列．今后称单调数列都是指这种广义的单调数列．

定理2 （单调有界准则）若单调数列是有界的，则它的极限必存在．

在§1中曾经证明：收敛的数列一定有界，但同时也曾指出：有界的数列不一定收敛．这个单调有界准则表明：如果数列不仅有界，并且是单调的，那末这个数列的极限一定存在，即这个数列必定收敛．

从几何直观上看，这个准则的成立是比较明显的．在数轴上，对应于单调数列的点u_n只可能向一个方向移动，所以只有两种可能：或者u_n沿数轴移动到无穷远($u_n\to+\infty$或$u_n\to-\infty$)；或者点u_n无



图 2-16

限逼近于某一定点A(图2-16)，也就是数列趋向一个极限．但现在已假定数列是有界的，即数列所对应的全部点都落在数轴上某一个区间$(-M, M)$内，那末上述的第一种情况就不可能发生了．因此这个数列必定有极限．

这个准则的证明已超出本课程的范围，在此从略．作为它的应用，我们讨论另一个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

下面首先考虑x取正整数而趋向$+\infty$的情形．

令　$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，下面证明数列$u_n$单调增加且有上界．按牛顿二项式定理把它展开

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

类似地，

$$u_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较u_n，u_{n+1}的展开式，可以看到除前两项外，u_n的每一项都小于u_{n+1}的对应项，而且u_{n+1}还多了最后一项，其值大于0，因此

$$u_n<u_{n+1},$$

这就说明数列u_n是单调增加的．下面再证明它还是有界的．因为如果将u_n的展开式中各项括号内的数用较大的数1来代替，则有

$$u_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

这说明数列u_n是有界的．根据单调有界准则可知这个数列的极限存在，通常用字母e表示它，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

可以证明数e是个无理数，若取它的小数到第15位，其值是

$$e\approx2.718281828459045.$$

当x取实数而趋向$+\infty$或$-\infty$时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的极限都

存在且都等于e。证明如下：

设 $n \leqslant x < n+1$，则

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

且 n 与 x 同时趋向 $+\infty$。因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e,$$

由夹挤准则即得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

令 $x=-(t+1)$，则当 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$，从而

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]$$

$$= e.$$

综上所述，我们证明了一个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4.2}$$

如果令 $z=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时 $z\to 0$．所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e.$$

因此，(4.2)式又可以写为

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{4.3}$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

解 令 $x=2t$ 则 $x\to\infty$时有$t\to\infty$，因此有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2=e^2.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$。

解 令 $x=-a$，则当$x\to 0$时也有$a\to 0$，于是有

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{a\to 0}(1+a)^{-\frac{1}{a}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{(1+a)^{\frac{1}{a}}}$$

$$=\frac{1}{e}.$$

在自然科学中，用e作对数底或指数底的函数在求导数时有特殊的便利（见导数一章），因此被经常采用. 以e为底的对数称为自然对数，用$\ln x$表示$\log_e x$.

§ 5 无穷小量的比较

在§3中已经知道，两个无穷小的和、差及乘积都是无穷小．但是两个无穷小的商却会出现不同的情况．例如当$x\to 0$时$2x$，$\sin x$，x^2都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

两个无穷小量之比的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋向于零的"快慢"程度．就上面几个例子来说，在$x\to 0$的过程中$x^2\to 0$比$2x\to 0$"快些"，或者反过来$2x\to 0$比$x^2\to 0$"慢些"．而$\sin x\to 0$与$x\to 0$"快慢相仿"．

下面仅就两个无穷小量之比的极限存在或为无穷大时的情况来进行比较，所讨论的α和β都是在同一个自变量作同一变化的过程中的无穷小，而$\lim\frac{\beta}{\alpha}$也是在这个变化过程中的极限．

定义 设α和β是两个无穷小量，

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小．

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小．

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小．特别是当$C=1$时，我们称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$．

例如当$x\to 0$时x^2，$1-\cos x$，$\operatorname{tg}x$都是无穷小，因为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 0$ 时 $1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时 x^2 是比 $\operatorname{tg}x$ 高阶的无穷小（或者说 $\operatorname{tg}x$ 是比 x^2 低阶的无穷小）.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时 $\operatorname{tg}x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\operatorname{tg}x\sim x(x\to 0)$.

下面介绍等价无穷小的代换定理. 这是求极限时常用的方法.

定理1 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也存在且有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证明 因为 $\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=1$ $\lim\dfrac{\beta}{\beta'}=1$，所以

$$\begin{aligned}\lim\frac{\beta}{\alpha}&=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\\&=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}\\&=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.\end{aligned}$$

证毕

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg}3x}$.

解 因为 $\sin 2x\sim 2x$，$\operatorname{tg}3x\sim 3x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，无穷小x^3+3x显然与它自身等价，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

应当注意：如果被代换的函数之间的运算不是乘或除的情况则不能用等价无穷小代换定理．例如，当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$，如果在以下极限式中：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$$

分别用x代替$\operatorname{tg}x$与$\sin x$，则得到极限为零的错误结果（读者不难验证这个极限等于$\dfrac{1}{2}$）．

有时分析问题并不计较两个变量的准确值，而只想分辨两者之间是否有"等级"的差异．下面介绍的这两个记号"o"及"O"就是起这种作用的．它们在自然科学及工程技术中是时常用到的．

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则记$\beta=o(\alpha)$．如果$\alpha$、$\beta$都是无穷小量，则$\beta=o(\alpha)$表示$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小．而$\beta=o(1)$就表示$\beta$本身是无穷小量．

若在自变量的某种变化过程中$\dfrac{\beta}{\alpha}$有界，即存在常数$M>0$，使$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\leqslant M$，则记$\beta=O(\alpha)$．作为它的特殊情况，如果$\alpha$，$\beta$是同阶

无穷小量，这时$\lim \frac{\beta}{\alpha}$存在，因而$\frac{\beta}{\alpha}$必定有界，所以也就有$\beta \doteq O(\alpha)$.

应当注意：不论$\beta=o(\alpha)$还是$\beta=O(\alpha)$，都是只有限定α和β在所讨论的确定过程中才有意义. 因此一般我们还得在它后面注明变化过程. 例如$\frac{1}{n^2}=o(\frac{1}{n})(n\to\infty)$，$1-\cos x=o(x)(x\to 0)$等等.

§6 连续函数

一 函数的连续性

自然界中有许多现象，如气温的变化，生物的生长，金属棒受热时其长度的增加，……，等等，都是连续变化着的. 例如就气温的变化而言，当时间变动很微小时，气温的变化也很微小，这就是所谓函数连续性.

下面先引入增量的概念，然后给出函数连续性的定义.

设变量u从它的一个初值u_1变到终值u_2，终值与初值之差u_2-u_1就叫做变量u在u_1处的增量，记为Δu，即

$$\Delta u=u_2-u_1.$$

增量Δu可以是正的，也可以是负的. 当$\Delta u>0$时，变量u从u_1变到$u_2=u_1+\Delta u$是增大的；当$\Delta u<0$时变量u是减小的.

应当注意：记号Δu并不表示某个Δ与变量u的乘积，而是一个不可分割的整体记号.

现在假定函数$y=f(x)$在点x_0的某一个邻域内有定义. 当自变量x在这邻域内由x_0变到$x_0+\Delta x$时，函数y相应地从$f(x_0)$变到$f(x_0+\Delta x)$，因此函数对应的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

这个关系式的几何解释如图2-17所示.

$$f(x)=f(x_0)+\Delta y.$$

可见$\Delta y\to 0$与$f(x)\to f(x_0)$也是等价的. 因此(6.1)式也可写成:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

所以，函数$y=f(x)$在x_0点连续的定义又可以如下叙述.

定义 设函数$y=f(x)$在x_0点某邻域U内有定义，若函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限存在，且等于$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{6.2}$$

则称函数$f(x)$在x_0点处连续.

根据函数极限的定义，所谓函数$f(x)$在x_0点处连续就是：任给正数ε，必存在正数δ，使得对于适合不等式$|x-x_0|<\delta$的一切$x(x\in U)$，其所对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 在这里取消了极限定义中要求$x\neq x_0$的限制，这是因为当$x=x_0$时，不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$也是成立的.

如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续，则称$f(x)$在区间(a, b)内连续，或称$f(x)$在(a, b)内处处连续，并称(a, b)为$f(x)$的连续区间.

如果$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，即 $f(x_0-0)$存在且

$$f(x_0-0)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在x_0点左连续：如果$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，即$f(x_0+0)$存在且

$$f(x_0+0)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在x_0点右连续.

如果函数$f(x)$在开区间$(a、b)$内连续，且在a点处右连续，在b点处左连续，则称$f(x)$在闭区间$[a、b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

在§3中已经证明过对于有理函数$R(x)$定义域内的点x_0有

$\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = R(x_0)$成立．由此可见有理函数在其定义域内的每一点处都是连续的．

例1 证明函数$y=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是处处连续的．

证明 设x是区间$(-\infty, +\infty)$内的任意一点．当x有增量Δx时，函数对应的增量为

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(x+\Delta x)-\sin x \\ &= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),\end{aligned}$$

注意到
$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

于是有
$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x)-\sin x| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

因为对于任意角度α，当$\alpha \neq 0$时恒有$|\sin\alpha| < |\alpha|$成立，所以

$$0 \leqslant |\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|.$$

当$\Delta x \to 0$时，由夹挤准则得$|\Delta y| \to 0$，从而有

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[\sin(x+\Delta x)-\sin x] = 0.$$

故对任何x值，函数$y=\sin x$都是连续的． 证毕

类似地可以证明$y=\cos x$在区间$(-\infty, +\infty)$内也是处处连续的．

二 函数的间断点

若函数$f(x)$在x_0点不连续，则称x_0为$f(x)$的间断点．由函数连续的定义可知，$f(x)$在x_0点连续必须

（1） $f(x)$在x_0点有定义；

（2） $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$都存在；

(3)　$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

这三条同时满足．根据这些条件，就可以将函数间断点分为以下两大类：

① $f(x_0+0)$、$f(x_0-0)$ 都存在，但不相等；或者虽然相等，但不等于$f(x_0)$（或函数在x_0点无定义），这时称x_0点为$f(x)$的第一类间断点．

例如，函数$y=[x]$在整数点N处，由于(见第一章§3例8)

$$\lim_{x\to N^-}[x]=N-1,\qquad \lim_{x\to N^+}[x]=N$$

所以函数$y=[x]$在所有整数点N处都有第一类间断点．

又如分段函数(图2-18)

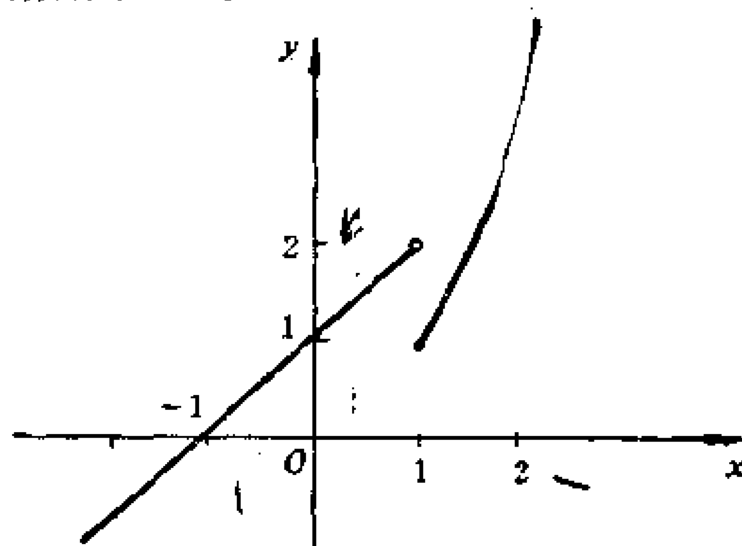


图 2-18

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{当 } x<1, \\ x^2, & \text{当 } x\geqslant 1. \end{cases}$$

因为
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2,$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1.$$

所以在$x=1$点处函数$f(x)$有第一类间断点．

在第一类间断点中有一种特殊情况：$f(x_0+0)$、$f(x_0-0)$

存在且相等（即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在），但不等于$f(x_0)$，或$f(x)$在$x_0$点处无定义，这时又称$x_0$为$f(x)$的可去间断点.

例如函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$点处没有定义，所以它在$x=1$点处不连续. 但这时有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$

所以$x=1$是函数$f(x)$的可去间断点.

又如函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时.} \end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0\neq f(0)$,

所以$x=0$是函数$f(x)$的可去间断点.

对于可去间断点，只要改变或重新定义$f(x)$在x_0点处的值，使它等于$f(x)$在这点的极限，就可以使函数在该点处连续. 就上述二例而言，前者只需要补充定义$f(1)=2$；后者只需将函数$f(x)$在$x=0$处的值重新定义为零，则"改造后"的函数就都成为连续函数了.

② 不是第一类的间断点,统称之为第二类间断点.在这种情况下$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$中至少有一个不存在. 例如$y=\dfrac{1}{x-1}$，在$x=1$处有第二类间断点，因为在该点处函数的左、右极限都不存在（由于当$x\to 1$时$\dfrac{1}{x-1}\to\infty$，所以这时又把$x=1$叫做函数的无穷型间断点）.

又如函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$（见§2例11）在$x=0$点处有第二类

间断点，因为在该点处函数的左、右极限都不存在（由于当 $x \to 0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ 在 -1 与 1 之间无限次振荡，所以又把此种间断点叫做函数的振荡型间断点）．

再如函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 点处有第二类间断点，因为函数在该点处的右极限是正无穷大（函数在该点处的左极限是零）：

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

三　初等函数的连续性

1　连续函数的和、积、商的连续性

由函数在一点处连续的定义和极限四则运算法则，立即可得以下几个定理：

定理 1　有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数．

证明　只需考虑两个函数的情况．设 $f(x)$、$g(x)$ 都在 x_0 点处连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

由极限运算法则就有

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0),$$

即 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 点连续．　　证毕

完全类似地可以证明下面两个定理．

定理 2　有限个在某点连续的函数的乘积，是一个在该点连续的函数．

定理 3　两个在某点连续的函数的商，当分母在该点不为零时，也在该点连续．

2 反函数与复合函数的连续性

反函数与复合函数的概念已经在第一章中作了介绍，下面来讨论它们的连续性。

定理4 如果函数$y=f(x)$在区间I_x上单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数$x=f^{-1}(y)$也在对应的区间$I_y=\{y|y=f(x),\ x\in I_x\}$上单调增加(或单调减小)且连续.

这个定理从几何直观上看是很明显的，但要从连续定义来证明则比较繁，在此从略.

例如，由于$y=\sin x$在闭区间$[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续，所以它的反函数$y=\arcsin x$在闭区间$[-1,1]$上也是单调增加且连续的.

定理5 设函数$u=\varphi(x)$当$x\to x_0$时的极限存在等于a，即$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$. 而函数$y=f(u)$在$u=a$点处连续，则复合函数$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$当$x\to x_0$时的极限也存在且等于$f(a)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a). \tag{6.3}$$

证明 由于$f(u)$在$u=a$点连续，故任给$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使当$|u-a|<\eta$时，$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$成立.

又由于$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，所以对$\eta>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$成立.

把上面两个步骤合并起来，得到：对任给的正数ε，存在着正数δ，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，不等式：

$$|f(u)-f(a)|=|f[\varphi(x)]-f(a)|<\varepsilon$$

成立. 这就证明了$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$. 证毕

在定理5中有

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a \quad 及 \quad \lim_{u\to a}f(u)=f(a),$$

所以(6.3)式又可写成

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)], \tag{6.4}$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a} f(u). \tag{6.5}$$

(6.4)式表示，在定理5的条件下，求复合函数的极限时，函数符号 f 与极限号可以交换顺序.

(6.5)式表示，在定理5的条件下，如果作代换 $u=\varphi(x)$，那么求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 就化为求 $\lim\limits_{u\to a}f(u)$，这里 $a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

把定理5中的 $x\to x_0$ 换成 $x\to\infty$，可得类似的定理.读者不妨自己写出这个定理并给予证明.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 因为 $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，而极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

又函数 $\ln u$ 在 $u=e$ 点处连续(这一点将在下段说明)所以根据定理5可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\ln e=1.$$

可见，当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)$ 与 x 是等价无穷小：

$$\ln(1+x)\sim x \quad (x\to 0).$$

定理6 设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数

$y=f(u)$在u_0点连续，则复合函数$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$在点$x_0$处也是连续的.

证明 因为$\varphi(x)$在x_0点连续. 即$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$. 所以只须在定理5中令$a=\varphi(x_0)$，由(6.3)式得

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\varphi(x_0)].$$

这就证明了复合函数在x_0点是连续的. 证毕

3 **初等函数的连续性** 根据$y=\sin x$，$y=\cos x$的连续性及本节的定理1、2、3、4可知所有的三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

指数函数$y=a^x$($a>0$，$a\neq 1$)对一切实数x都有定义，在区间$(-\infty, +\infty)$内它是单调的，其值域为$(0, +\infty)$. 可以证明它在$(-\infty, +\infty)$内是连续的(证明从略).

由指数函数的单调和连续性，引用定理4可得：对数函数$y=\log_a x$($a>0$，$a\neq 1$)在区间$(0, +\infty)$内单调且连续.

幂函数$y=x^\alpha$的定义域与α的具体数值有关. 但无论α为何值，在区间$(0, +\infty)$内幂函数总是有定义的. 当$x>0$时

$$x^\alpha=a^{\alpha\log_a x}(a>0,\ a\neq 1).$$

因此，幂函数x^α可看作是由$y=a^u$，$u=\alpha\log_a x$复合而成，根据定理6就知道它在$(0, +\infty)$内连续. 若对α取各种值分别加以讨论，还可以证明"幂函数在其定义域内总是连续的"这一结论(证略).

综合起来得到：基本初等函数在其定义域内都是连续的.

最后，根据初等函数的定义、基本初等函数的连续性及本节的定理1、2、3、6可得下列重要结论：

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间.

因为在实际中经常用到的就是初等函数，所以关于初等函数连

续性的上述结论是非常重要的．就拿求极限来说，如果 $f(x)$ 是初等函数，而 x_0 又是它的一个定义区间上的点，那末求 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，就只需求函数值 $f(x_0)$．

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$．

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$，$(a>0,\ a\neq 1)$．

解 令 $a^x-1=h$，则因 $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$，所以当 $x\to 0$ 时有 $h\to 0$． 又 $x=\dfrac{1}{\ln a}\ln(1+h)$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\ln a}{\ln(1+h)}$$

$$=\ln a\lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

$$=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a.$$

四 连续函数在闭区间上的性质

闭区间上的连续函数有几个重要性质，它们是今后常用的．但

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{当}-1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & \text{当}0<x\leqslant 1\end{cases}$$

就没有最小值.

定理9（零值点定理） 若$f(x)$在$[a, b]$上连续，而$f(a)$与$f(b)$异号，则在开区间(a, b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=0$（图2-20）.

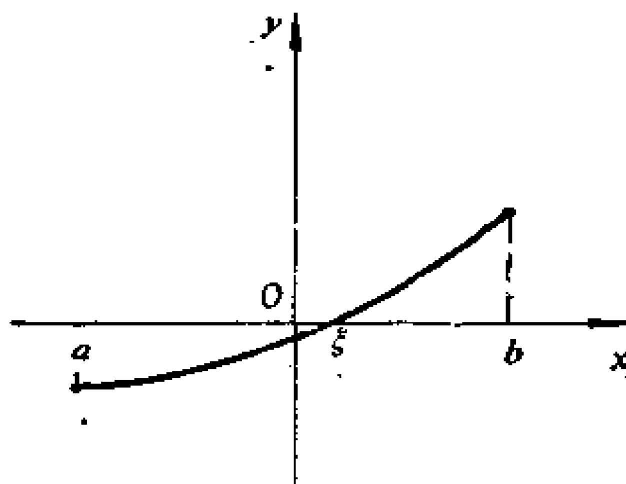


图 2-20

由定理9立即可以推得一个更一般的定理.

定理10（介值定理） 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且在区间端点处函数值不同：

$$f(a)=A,\ f(b)=B,\ \text{且}A\neq B,$$

则对介于A、B之间的任一数C，在开区间(a, b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$（$a<\xi<b$）.

证明 设$F(x)=f(x)-C$，则$F(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$F(a)=A-C$与$F(b)=B-C$异号，根据零值点定理，在(a, b)内必存在一点ξ使$F(\xi)=0$，即存在一点$\xi\in(a, b)$使$f(\xi)=C$. 证毕

这个定理的几何意义是：在闭区间$[a, b]$上连续的函数$y=f(x)$所对应的曲线与水平直线$y=C$（C介于$f(a)$与$f(b)$之间）至少相交于一点.

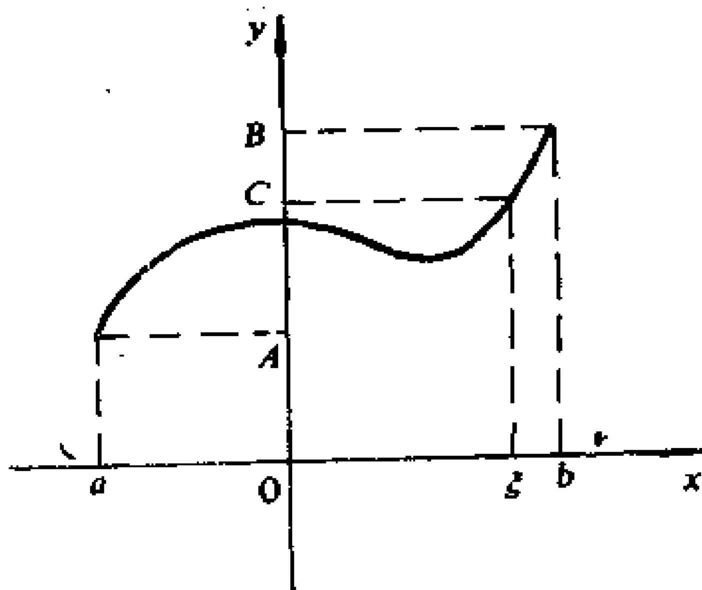


图 2-21

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

设 $m=f(x_1)$，$M=f(x_2)$，而$m\neq M$. 在闭区间$[x_1,x_2]$(或$[x_2, x_1]$)上应用介值定理，即得上述推论.

定理9、定理10成立的条件都是：函数在"闭区间"上"连续"如果不是"闭区间"或是"不连续"，则定理是不成立的，其反例由读者自己举出.

例5 证明方程$x\ln x-2=0$在$(1, e)$上有而且只有一个实根.

证明 作辅助函数$f(x)=x\ln x-2$，则$f(x)$在闭区间$[1, e]$上连续. 因为$f(1)=-2$，$f(e)=e-2>0$，所以由零点定理知在$(1, e)$内必存一点$\xi\in(1, e)$，使$f(\xi)=0$，即方程$x\ln x-2=0$在$(1, e)$内有一个实根. 下面证明方程只有一个实根.

因为$\ln x$是单调增函数，所以当$x>\xi>1$时有$\ln x>\ln\xi$成立，从而有$x\ln x-2>\xi\ln\xi-2=0$成立. 这就是说当$x>\xi$时方程$x\ln x-2=0$没有实根.

当$1\leqslant x<\xi$时有$\ln x<\ln\xi$，从而有

$$x\ln x-2<\xi\ln\xi-2=0,$$

即当$x\in(1,\ \xi)$时方程$x\ln x-2=0$也没有实根.

总结上述可知方程$x\ln x-2=0$在$(1,\ e)$上有而且只有一个实根.　　　　证毕

例6　设$f(x)$在$(a,\ b)$内连续，$x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为$(a,\ b)$内任意$n$个点. 证明在$(a,\ b)$内必存在一点$\xi\in(a,\ b)$使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明　令$c=\min(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$d=\max(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$则有$[c,\ d]\subseteq(a,\ b)$，且$c\leqslant x_i\leqslant d(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 函数$f(x)$在闭区间$[c,\ d]$上连续. 由最大值、最小值存在定理$f(x)$在$[c,\ d]$上有最大值$M$及最小值$m$，使：$m\leqslant f(x_i)\leqslant M$（$i=1,\ 2,\cdots,n$），从而

$$m=\frac{nm}{n}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

$$\leqslant\frac{nM}{n}=M.$$

根据定理10的推论可知在$[c,\ d]$内必存在一点ξ使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\quad \xi\in[c,\ d]\subseteq(a,b).$$

证毕

五*　一致连续概念

在连续函数的研究和应用中，有一个经常用到的重要概念——一致连续概念. 本段先介绍这个概念，然后不加证明地给出康托(Cantor)定理.

设函数$f(x)$在某区间I上连续. 按照定义，$f(x)$在区间I上的每一点处都是连续的，即对区间I中的一点x_0，如果任给$\varepsilon>$

0，必存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$（$x\in I$）时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立。

一般说来，对同一个正数ε，当x_0点不同时，δ一般是不同的。例如函数$f(x)=\frac{1}{x}$，（$0<x<+\infty$）、当x_0点离原点越近，δ就应取得越小；当x_0离原点较远时，δ就可以取得大些（图2-22）。因此δ既依赖于ε，也依赖于x_0，可以将它记为$\delta(x_0,\varepsilon)$。但在许多问题的研究中，有时就要求对给定的$\varepsilon>0$，能取到一个对区间I内所有的点都适用的$\delta(>0)$；这个δ仅依赖于ε，可记为$\delta=\delta(\varepsilon)$，这就需要引进一致连续概念。

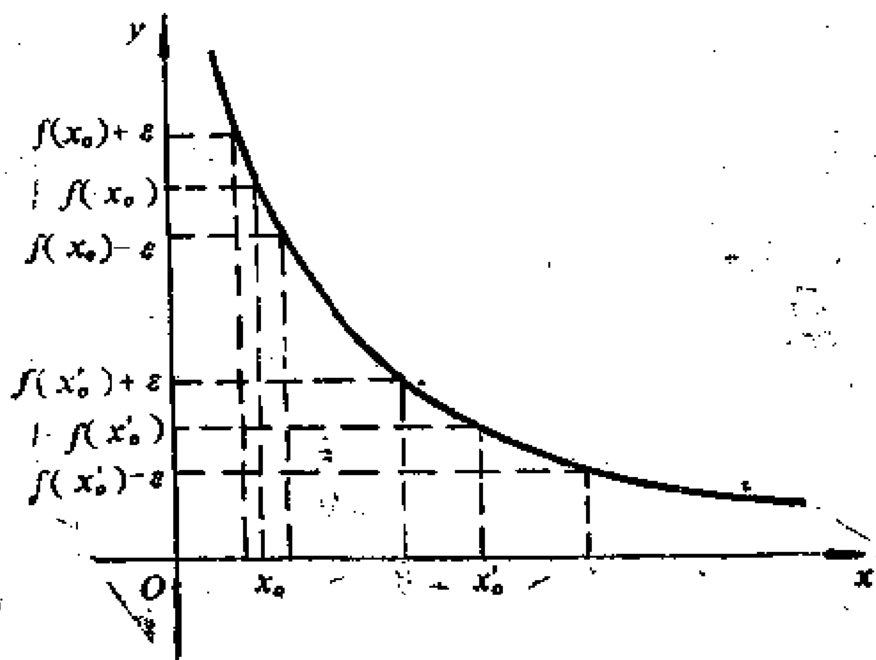


图 2-22

定义　设函数$f(x)$在区间I上满足：任给$\varepsilon>0$，存在一个只与ε有关，而与I中的点x无关的$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对区间$I$中任意两点$x_1$，$x_2$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，总有不等式$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$成立，则称函数$f(x)$在区间$I$上一致连续。

由定义显然可知：若$f(x)$在区间I上一致连续，则$f(x)$在I上必定连续，但其逆不真。

例7 证明函数$y=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内一致连续.

证明 因为

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$
$$\leqslant|x_1-x_2|,$$

故任给$\varepsilon>0$，可取$\delta=\varepsilon>0$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，恒有$|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon$成立. 所以$y=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$上是一致连续的.

证毕

例8 证明$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0, 1)$内不一致连续.

证明 给定$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对无论多么小的正数$\delta$，总可以取$n$充分大，使得$\dfrac{1}{n^2}<\delta$. 于是在区间$(0, 1)$内存在两点$x_1=\dfrac{1}{n}$，$x_2=\dfrac{1}{n+1}$，它们满足不等式

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\delta,$$

而

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0, 1)$内不一致连续.

证毕

上例表明在开区间内连续的函数，不一定能保证在该区间的一致连续性. 但对于闭区间上的连续函数来说，则有下述定理成立.

康托(Cantor)定理 闭区间$[a, b]$上的连续函数$f(x)$在$[a, b]$上一致连续.

证明从略.

第三章　导数与微分

在实际问题中，常常要讨论由于自变量的变化所引起的函数变化"快慢"问题，例如物体运动的速度、密度、电流强度、温度梯度等．此外，还要研究由于自变量的微小改变所引起函数的微小改变量的近似值问题．在数学上，前者是导数问题，后者是微分问题．导数、微分及其应用构成了微积分学中单元函数微分学．

本章将从实际问题引进微分学的两个主要概念——导数与微分，建立起计算导数、微分的方法——微分法，并讨论微分在近似计算上的应用，至于导数的应用将在下一章研究．

§1　导数概念

一　导数问题的引例

为了引进导数的定义，先看两个引例．

1　**直线运动的速度问题**　设质点沿着Os轴运动，在时刻t_0的位置P_0，其坐标为s_0，在时刻t的位置为P，其坐标为s（图3－1）．

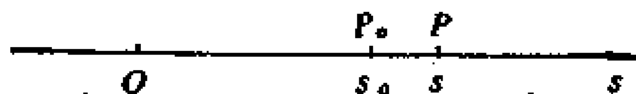


图 3-1

对于每个t值，都有对应的s值，于是路程s是时间t的函数，记为

$$s = s(t). \tag{1}$$

（1）式称为质点的运动方程．现在要求质点在时刻t_0的速度．

对于匀速直线运动来说，从t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内，质点走的路程为Δs，那么在这段时间内，质点运动的平均速度为

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

当Δt变化时，v是个常数．因此，它完全确定了匀速直线运动在任一时刻的速度，即在时刻t_0，质点的速度也是v．

对于变速运动来说，从全过程看，速度的变化可能很大，但从一个短时程看，速度的变化并不大．为了能利用匀速运动的速度来刻画时刻t_0的速度，我们限制在一个短时程内，即从t_0到$t_0+\Delta t$这一小段时间来考虑（Δt可正可负，这里不妨设$\Delta t>0$）．在$[t_0, t_0+\Delta t]$区间内，由于速度是连续变化的，当Δt很小时，速度就没有大的变化，可以暂时把变速运动近似地看作匀速运动来处理．在t_0到$t_0+\Delta t$这一段时间内，经过的路程为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0).$$

作比值

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

这个比值就是变速直线运动在时间区间$[t_0, t_0+\Delta t]$上的平均速度$\overline{v}$，可以作为t_0时刻速度的近似值．显然，Δt愈小时，近似程度就愈好，因此可以用缩短时间区间的办法来提高精度．但是不论Δt取多么小，$\overline{v}$仍是平均速度．如果采用极限的方法，令$\Delta t\to 0$，若平均速度$\overline{v}$的极限存在，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=v_0,$$

则称v_0为直线运动$s=s(t)$在t_0时刻的瞬时速度．

上述的分析过程，不仅准确地描述和刻画了瞬时速度的概念，而且也提供了计算瞬时速度的三个具体步骤：

（1） 由时间t在t_0时刻的改变量Δt，求$s=s(t)$在t_0时刻的改变量：

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$

（2） 求在〔t_0，$t_0+\Delta t$〕上的平均速度：

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

（3） 令$\Delta t\to 0$，求平均速度的极限

对于质量分布不均匀的金属丝来说，为了确定在x_0点处的线密度，我们限制在x_0点到$x_0+\Delta x$（不妨设$\Delta x>0$）点的一小段金属丝来考虑．当Δx很小时，质量分布变化也很小，可以当作质量分布是均匀的处理，前面已经算出自x_0点到$x_0+x\Delta$点一小段金属丝的质量为

$$\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0).$$

则比值

$$\bar{\delta}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

称为该金属丝在x_0点到$x_0+\Delta x$点这一小段长度上的平均线密度．它可以作为金属丝在x_0点线密度的近似值．一般说来，Δx愈小，近似程度就愈好．当$\Delta x\to 0$时，若比值$\frac{\Delta m}{\Delta x}$的极限存在：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\bar{\delta}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\delta_0,$$

则称δ_0为金属丝在x_0点处的线密度．

二　导数的定义

在工程和科技中如速度、线密度这类问题还有很多．从上面所讨论的两个问题可以看出它们的共性，都可以归结为如下的极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

这里Δx是自变量x在x_0点处的增量．

撇开这些量的具体意义，抓住它们在数量关系上的共性，就可以得到函数的导数定义．

在x_0点处连续的函数$f(x)$，当极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$$

时，虽然导数不存在，但是为了方便起见，也往往说函数$f(x)$在x_0点的导数为无穷大，也可写为$f'(x_0)=\infty$.

上面刻画的是函数在一点处可导，如果函数$f(x)$在开区间（a, b）内每一点都可导，便称函数$f(x)$在开区间（a, b）内可导. 当函数$f(x)$在开区间（a, b）内可导时，对于任一$x\in(a, b)$，都有一个确定的导数值$f'(x)$与之对应，因此$f'(x)$也是区间（a,b）内的函数. 这个函数称为原来函数$f(x)$的导函数，记为y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$或$\frac{df(x)}{dx}$. 在不致于引起混淆情况下，往往也把导函数简称为导数.

显然，函数$f(x)$在x_0点处的导数$f'(x_0)$是导函数$f'(x)$在$x=x_0$点处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}.$$

例1　求函数$y=x^2$的导函数，并求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

解　求增量：在任意点x处给自变量以增量Δx，算出函数相应的增量

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

作比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

取极限：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

故函数$f(x)=x^2$的导函数$f'(x)=2x$. 函数$f(x)=x^2$在$x=1$点处

的导数为$f'(1)=2x|_{x=1}=2$.

例2 求函数$y=\sqrt{x}$在$x=x_0$（$x_0>0$）点处的导数.

解 求增量：在x_0点处给自变量以增量Δx，算出函数相应的增量

$$\Delta y=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}.$$

作比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}.$$

取极限：

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

定义 设函数$f(x)$在x_0点的右侧$[x_0, x_0+\Delta x]$（$\Delta x>0$）有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数$f(x)$在x_0点处对于自变量x的右导数，记为$f_+'(x_0)$. 仿此可以定义函数$f(x)$在x_0点处对于自变量x的左导数为

$$f_-'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

根据函数$f(x)$在x_0点处导数的定义，有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$f'(x_0)$是一个极限值，而极限存在的充分必要条件是左、右极限

都存在且相等. 因此, $f(x)$在x_0点处可导的充分必要条件是$f(x)$在x_0点处的左、右导数存在且相等, 即

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0).$$

若函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导, 且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$皆存在, 则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

三 导数的几何意义

在平面几何中, 圆的切线的定义是"与圆有唯一交点的直线". 这个定义不适用于一般的曲线. 对于一般的曲线须重新建立切线的定义: 设有曲线L, M_0为曲线L上一点, M为L上另一点, 作割线M_0M, 当点M沿曲线L趋向点M_0时, 如果割线M_0M绕点M_0转动而趋向于极限位置M_0T, 则称直线M_0T为曲线L在点M_0处的切线.

设已给函数$y=f(x)$, 在直角坐标系中其图形为曲线L. $M_0(x_0,y_0)$为曲线L上一点, 其中$y_0=f(x_0)$, $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$为曲线$L$上另一点, 过$M_0$、$M$两点作割线$M_0M$, 则割线的斜率为

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

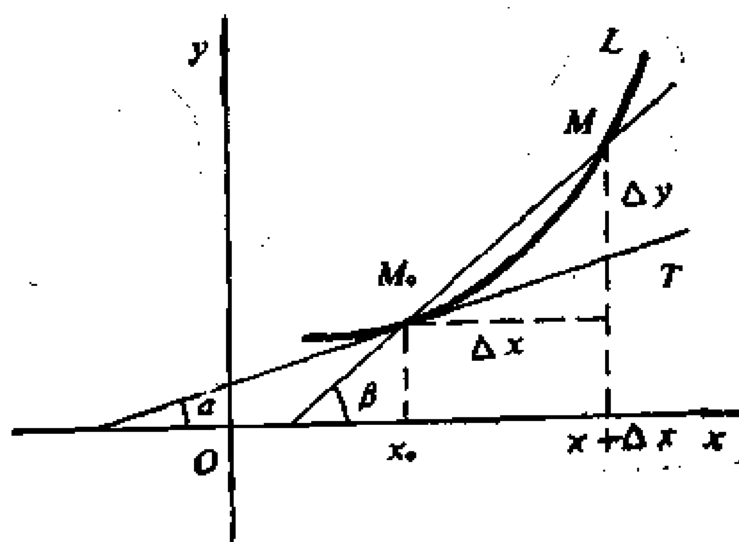


图 3-3

其中β为割线M_0M的倾角.

当点M沿着曲线L移动而趋向于点M_0时，$\Delta x\to 0$，如果当$\Delta x\to 0$时，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，此极限就是导数$f'(x_0)$.这时割线M_0M趋于极限位置M_0T，则割线斜率$\operatorname{tg}\beta$的极限就是切线的斜率$\operatorname{tg}\alpha$，即

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

其中α为切线的倾角.

这就是说，函数$y=f(x)$在x_0点处的导数$f'(x_0)$，在几何上表示曲线$y=f(x)$在(x_0, y_0)点处的切线的斜率.

根据平面解析几何里的直线的点斜式方程可知，曲线$y=f(x)$上一点$M_0(x_0, y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

式中的x，y是切线上动点的坐标.

过曲线$y=f(x)$上一点M_0而与切线垂直的直线称为曲线在M_0点的法线，因此法线的斜率为

$$-\frac{1}{f'(x_0)},\ (f'(x_0)\neq 0),$$

法线的方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),$$

式中的x，y是法线上动点的坐标.

如果$f'(x_0)=0$，则曲线$y=f(x)$上一点$M_0(x_0, y_0)$处的切线平行于Ox轴，从而可知切线方程为$y=y_0$，法线方程为$x=x_0$.

当函数$f(x)$在x_0点处连续，而导数为无穷大时，那么曲线$y=$

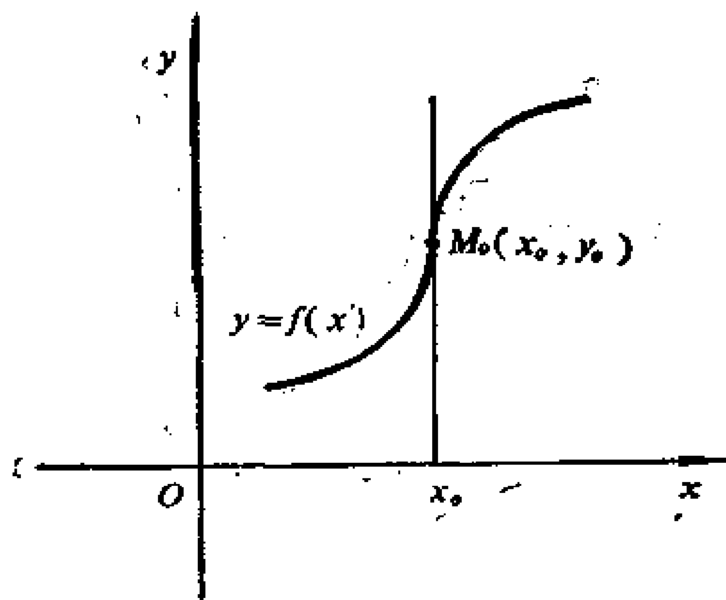


图 3-4

$f(x)$在点（x_0，y_0）处的切线垂直于Ox轴（图3-4）.

例 3 求曲线$y=x^2$在点$M_0(1, 1)$处的切线方程和法线方程.

解 函数$y=x^2$的导数$y'=2x$，且$y'|_{x=1}=2$，故过M_0点的切线斜率$k=2$，法线的斜率$k_1=-\dfrac{1}{2}$，

切线M_0T的方程：$y-1=2(x-1)$.

法线M_0N的方程：$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ （图3-5）.

例 4 设反射镜面是由曲线$y^2=x$绕Ox轴旋转而成的曲面. 试证明：平行于Ox轴的光线经镜面反射后均聚集于抛物线的焦点$F\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

证明 由物理学中光的反射定律可知：光的入射角（即入射光线与法线的夹角）等于反射角（即反射光线与法线的夹角）. 在抛物线上任取一点$M_0(x_0, y_0)$，其中$y_0=\sqrt{x_0}$，（$x_0>0$）. 过M_0点作抛物线$y=\sqrt{x}$的切线M_0Q交Ox轴于点Q，其倾斜角为α. 入射光线RM_0的入射角为β_1，反射光线M_0F交Ox轴于点F，其反射角为β_2. 由于$\beta_1=\beta_2$，可知$\alpha_1=\alpha_2$. 又由于入射光线平行于Ox

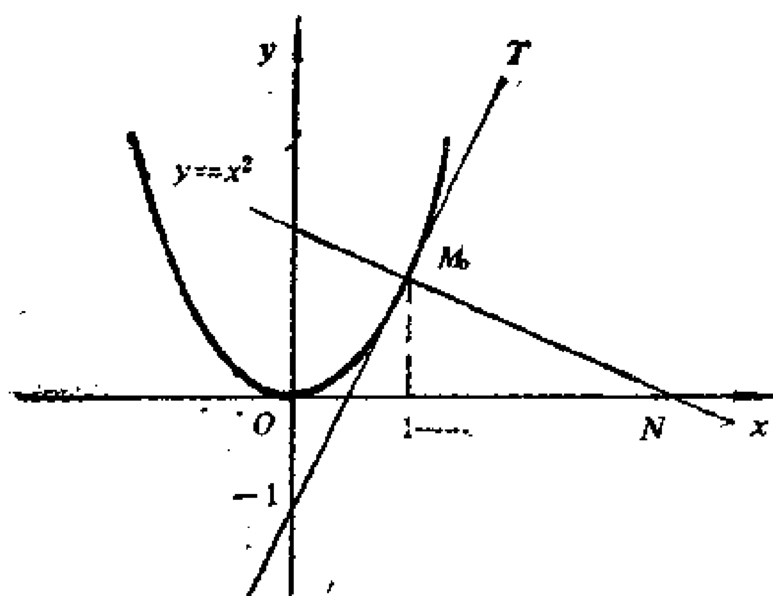


图 3-5

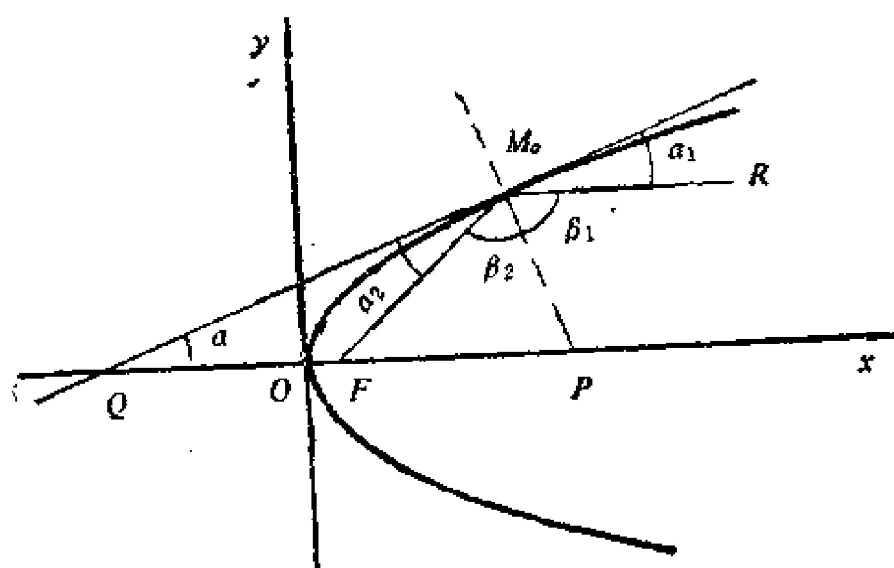


图 3-6

轴，故$\alpha_1=\alpha$，于是得到

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha.$$

$\triangle M_0QF$是等腰三角形，从而有

$$|FQ|=|FM_0|.$$

函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，过$M_0(x_0, y_0)$的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0),$$

此切线与Ox轴的交点Q的横坐标满足方程组：

$$\begin{cases} y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0), \\ y=0. \end{cases}$$

解出Q的坐标为（$-x_0$，0），设点F的坐标为（x_F，0），那么

$$|FQ|=x_F+x_0,$$
$$|FM_0|=\sqrt{(x_0-x_F)^2+y_0^2},$$

其中$y_0^2=x_0$. 由 $|FQ|=|FM_0|$，得到

$$x_F+x_0=\sqrt{(x_0-x_F)^2+x_0},$$

解得

$$x_F=\frac{1}{4},$$

故点F的坐标为$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

因点$M_0(x_0, y_0)$是抛物线任取的一点（$x_0>0$），故知任何平行于Ox轴的光线经反射后均聚集于抛物线的焦点$F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

证毕

四　函数的可导性与连续性的关系

函数任一点处的可导性与连续性是函数的两个重要概念. 虽然在导数的定义中，并未要求函数在x_0点处连续，但可导性与连续性之间有着内在的关系.

定理1　如果函数$y=f(x)$在x_0点处可导，则$f(x)$在x_0点处连

续.

证明 设自变量在x_0点有增量Δx，函数在x_0点处对应的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

因为函数$y=f(x)$在x_0点处可导，故极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在．再根据具有极限的函数与无穷小量的关系可知：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$$

从而有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

那么，当$\Delta x\to 0$时，就得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x)=0.$$

据函数在一点处连续的定义，可知函数$y=f(x)$在x_0点处连续．

这个定理说明，如果函数$f(x)$在x_0点处可导，那么这个函数在x_0点处必定连续．即可导是函数连续的充分条件．

然而一个函数在某点处连续却不一定在该点处可导，下面的例子就说明了这一点．

例5 函数$y=|x|$在$x=0$点处是连续的，但是它在该点处不可导．

证明 函数$y=|x|$在$x=0$点处连续是很明显的．下面证明它在$x=0$点处不可导．事实上，

$$\Delta y=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|=\begin{cases}\Delta x, & \text{当}\Delta x>0,\\ -\Delta x, & \text{当}\Delta x<0.\end{cases}$$

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

即当$\Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的左、右极限皆存在，但不相等. 也就是说，函数$y=|x|$在$x=0$点处的左、右导数存在，但不相等，即函数$y=|x|$在$x=0$点处不可导（图3-7）.

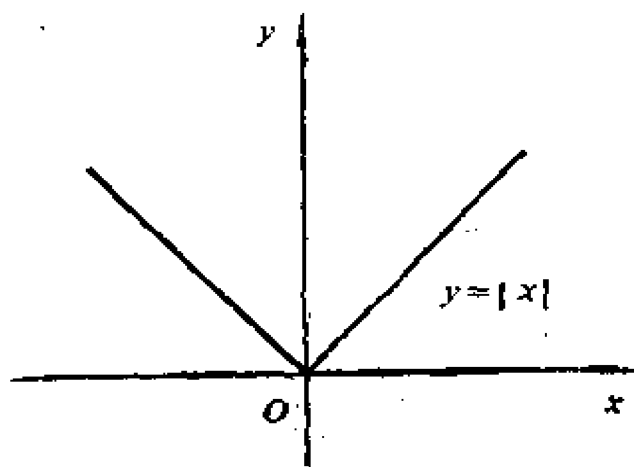


图 3-7

例6 函数

$$y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & 当x\neq 0, \\ 0, & 当x=0 \end{cases}$$

在$x=0$点处连续，但在$x=0$点处不可导.

证明 显然所给函数在$x=0$点处连续，下面证明该函数在$x=0$点处不可导. 事实上，在$x=0$点处

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0+\Delta x)\sin\left(\frac{1}{0+\Delta x}\right)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

2　幂函数$y=x^{\alpha}$（α为实数）的导数　当α为正整数n时，

求增量：应用二项式定理

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^n-x^n\\&=\left[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2\right.\\&\quad\left.+\cdots+(\Delta x)^n\right]-x^n\\&=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n.\end{aligned}$$

作比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}.$$

取极限：　　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.$

即

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{1.4}$$

当α为任意的实数时，公式（1.4）仍然成立，其证明将在§2例13中给出．因此，对幂函数$y=x^{\alpha}$，有导数公式

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{1.5}$$

例7　求导数$(x^5)'$，$\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)'$.

解　根据幂函数的导数公式（1.5）有

$$(x^5)'=5x^4.$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

3　正弦函数$y=\sin x$的导数

求增量：利用正弦差化积的公式

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

作比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

取极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

由于余弦函数$\cos x$的连续性及两个重要极限之一$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$，从而有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1,$$

故有

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (1.6)$$

用类似的方法，容易求余弦函数$\cos x$的导数为

$$(\cos x)'=-\sin x. \qquad (1.7)$$

4　对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）的导数

求增量：给自变量x以增量Δx，则有

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

作比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

取极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

利用两个重要极限之一：$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$，便有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e,$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \qquad (1.8)$$

特别是当$a=e$时，$\ln e=1$，从而以e为底的对数函数$\ln x$的导数为

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \qquad (1.9)$$

从以上求导数的过程可以看出，按求增量、作比值、取极限三个步骤求导数，即便是求最简单的基本初等函数x^n，$\sin x$，$\log_a x$的

导数，也需要许多技巧，对于稍复杂的函数来说就更困难了．为了使求导数有实际可行的简便方法，下一节将建立起一套求导的法则．

§2 函数的微分法

求函数的导数的方法称为微分法．本节要介绍的微分法是指运用求导数的基本法则和基本初等函数的导数公式，求出初等函数导数的方法．根据初等函数的结构，建立最基本的一组求导数的法则和公式，其中包括基本初等函数的导数公式，函数的和、差、积、商的导数公式，复合函数的微分法则，利用这一系列的求导法则和公式，就能比较简捷地求出初等函数的导数．

一 函数的和、差、积、商的求导法则

定理1 设函数$u(x)$，$v(x)$在同一点x处可导，则函数$y=u(x)\pm v(x)$在x点处也可导，且有

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x). \tag{2.1}$$

证明 设自变量在x点处有增量Δx，则函数y对应的增量为

$$\begin{aligned}\Delta y&=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&=\Delta u\pm\Delta v,\end{aligned}$$

作比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

取极限

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$=u'(x)\pm v'(x).$$ 证毕

即两个函数的代数和的导数，等于这两个函数的导数的代数和.

这个定理可以推广到有限多个函数的代数和的情形，即

$$[u_1(x)\pm u_2(x)\pm\cdots\pm u_n(x)]'$$
$$=u_1'(x)\pm u_2'(x)\pm\cdots\pm u_n'(x).$$

例1 求 $y=x^5+\sin x-\ln x$ 的导数.

解
$$y'=(x^5+\sin x-\ln x)'$$
$$=(x^5)'+(\sin x)'-(\ln x)'$$
$$=5x^4+\cos x-\frac{1}{x}.$$

例2 求 $y=\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\ln 2x$ 的导数.

解 将函数作恒等变形，改写为

$$y=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}+\ln x+\ln 2$$
$$y'=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}+\ln x+\ln 2)'$$
$$=(x^{\frac{1}{2}})'-(x^{-\frac{1}{6}})'+(\ln x)'+(\ln 2)'$$
$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}+\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{x}.$$

定理2 设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在同一点 x 处可导，则函数 $y=u(x)v(x)$ 在点 x 处也可导，且有

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x). \tag{2.2}$$

证明 设自变量在 x 点处有增量 Δx，则函数 y 对应的增量为

$$\Delta y=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)$$
$$=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)$$

$$
\begin{aligned}
&+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\
=&[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)\\
&+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\\
=&\Delta u v(x+\Delta x)+u(x)\Delta v.
\end{aligned}
$$

作比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

取极限，注意到$u(x)$，$v(x)$都在x点处可导，故$v(x)$在x点处必连续．于是，当$\Delta x\to 0$时，$v(x+\Delta x)\to v(x)$，那么

$$
\begin{aligned}
y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\
&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).
\end{aligned}
$$

证毕

即两个可导函数$u(x)$，$v(x)$的乘积的导数，等于$u(x)$的导数$u'(x)$乘以$v(x)$的积与$v(x)$的导数$v'(x)$乘以$u(x)$的积的和．

特别是当$v(x)=C$（C为常数）时，有

$$[Cu(x)]'=Cu'(x).$$

也就是说，求常数与可导函数乘积的导数时，可以将常数因子C提到求导记号外边去．

定理2的求导法则可以推广到有限多个函数乘积的情形，例如三个函数之积的情形：

$$
\begin{aligned}
&[u(x)v(x)w(x)]'\\
=&u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x).
\end{aligned}
$$

例3　求函数$y=(x-x^3)\ln x$的导数．

解　$y'=[(x-x^3)\ln x]'$

$$=(x-x^3)'\ln x+(x-x^3)(\ln x)'$$
$$=(1-3x^2)\ln x+(x-x^3)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=(1-3x^2)\ln x+(1-x^2).$$

例4 求函数$y=(2x+3)(1-x)(x+3)$的导数.

解 $y'=(2x+3)'(1-x)(x+3)+(2x+3)(1-x)'(x+3)$
$+(2x+3)(1-x)(x+3)'$
$=2(1-x)(x+3)-(2x+3)(x+3)+(2x+3)(1-x)$
$=-6x^2-14x.$

定理3 设函数$u(x)$，$v(x)$在同一点x处可导，且$v(x)\neq0$，则函数$y=\frac{u(x)}{v(x)}$在点x处也可导，且有

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}. \tag{2.3}$$

证明 设自变量在点x处有增量Δx，则函数y对应的增量为

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}$$
$$=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}$$
$$=\frac{v(x)[u(x)+\Delta u]-u(x)[v(x)+\Delta v]}{v(x)[v(x)+\Delta v]}$$
$$=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{v(x)[v(x)+\Delta v]}.$$

作比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)[v(x)+\Delta v]}.$$

取极限，由于$v(x)$的连续性，当$\Delta x\to0$时，$\Delta v\to0$，于是得

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)[v(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v]}$$

$$=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

即两个可导函数之商的导数，等于分母$v(x)$乘以分子的导数$u'(x)$减去分子$u(x)$乘以分母的导数$v'(x)$，再除以分母的平方$[v(x)]^2$.

特别是$u(x)=1$时，有

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

例5 求函数$y=\mathrm{tg}x$和$y=\mathrm{ctg}x$的导数.

解 先求$y=\mathrm{tg}x$的导数.

$$y'=(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

即

$$(\mathrm{tg}x)'=\sec^2 x. \tag{2.4}$$

再求$y=\mathrm{ctg}x$的导数.

$$y'=(\mathrm{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

$$=\frac{\sin x(\cos x)'-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

即

$$(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2 x. \tag{2.5}$$

例 6 求函数$y=\sec x$和$y=\csc x$的导数.

解
$$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\,\mathrm{tg}x.$$

即

$$(\sec x)'=\sec x\,\mathrm{tg}x. \tag{2.6}$$

用同样的方法容易求得

$$(\csc x)'=-\csc x\,\mathrm{ctg}x. \tag{2.7}$$

二 反函数的导数

前面已经求出基本初等函数中的幂函数、三角函数和对数函数的导数公式，还需要求出反三角函数和指数函数的导数公式. 下面先介绍反函数求导数的一般定理，并利用这一定理求出反三角函数和指数函数的导数.

定理 4 设函数$x=\varphi(y)$在区间I内单调且可导，并且$\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数$y=f(x)$在对应区间$J=\{x\,|\,x=\varphi(y),\ y\in I\}$内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{2.8}$$

证明 因为函数$x=\varphi(y)$在区间I内单调而且可导，故它在区

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

其中，$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$的根式前面取正号，是因为在区间$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$内，$\cos y>0$. 于是反正弦函数的导数为

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.9}$$

用同样的方法可以求出反余弦函数的导数为

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.10}$$

例8 求反正切函数$y=\operatorname{arctg}x$的导数.

解 反正切函数$y=\operatorname{arctg}x$，$-\infty<x<+\infty$，是函数$x=\operatorname{tg}y$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，的反函数．而函数$x=\operatorname{tg}y$在开区间$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$内单调且可导，并且

$$(\operatorname{tg}y)'=\sec^2 y>0,\quad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

根据(2.8)式，在对应的区间$-\infty<x<+\infty$内有

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.11}$$

用同样的方法可以求出反余切函数的导数为

$$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.12}$$

例 9 求指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) 的导数.

解 指数函数 $y=a^x$, $-\infty<x<+\infty$, 是对数函数 $x=\log_a y$, $0<y<+\infty$ 的反函数. 而函数 $x=\log_a y$ 在开区间 $0<y<+\infty$ 内单调且可导, 根据 (1.8) 式有

$$(\log_a y)' = \frac{1}{y\ln a} \neq 0, \quad y\in(0, +\infty).$$

再由 (2.8) 式, 在对应的区间 $-\infty<x<+\infty$ 内有

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x\ln a.$$

于是指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) 的导数为

$$(a^x)' = a^x\ln a. \tag{2.13}$$

特别是当 $a=\mathrm{e}$ 时, 注意到 $\ln\mathrm{e}=1$, 于是有

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x. \tag{2.14}$$

当 $a=\mathrm{e}^{-1}$ 时, 注意到 $\mathrm{e}^{-x}=(\mathrm{e}^{-1})^x$ 及 $\ln(\mathrm{e}^{-1})=-1$, 于是有

$$(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}. \tag{2.15}$$

例10 求下列双曲函数:

$$\mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$

的导数.

解 $$(\mathrm{sh}x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)'-(\mathrm{e}^{-x})'}{2}$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\text{ch}x.$$

$$(\text{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{(e^x)'+(e^{-x})'}{2}$$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\text{sh}x.$$

$$(\text{th}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=\left(\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right)'$$

$$=\frac{\text{ch}^2x-\text{sh}^2x}{\text{ch}^2x}=\frac{1}{\text{ch}^2x}.$$

三 复合函数的微分法

前面四个定理解决了由可导函数经过四则运算所构成的函数的微分法，及单调可导函数的反函数的微分法，并且推导出基本初等函数的导数公式．但是到目前为止，对形如

$$\sqrt{\sin 3x},\ \text{arctg}(x^2+1),\ \ln\text{tg}x$$

的复合函数，还不知它们是否可导，如果可导的话，怎样求出它们的导数．

现在以求函数$y=(\sin x)^2$的导数为例，显然它是由基本初等函数$y=u^2$及$u=\sin x$构成的复合函数，容易求得它们的导数分别为

$$\frac{dy}{du}=2u,\quad \frac{du}{dx}=\cos x.$$

而复合函数$y=(\sin x)^2$的导数$\frac{dy}{dx}$与$\frac{dy}{du}$、$\frac{du}{dx}$有什么关系呢？

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sin(x+\Delta x))^2-\sin^2x}{\Delta x}$$

$$=[\sin(x+\Delta x)+\sin x]\cdot\frac{[\sin(x+\Delta x)-\sin x]}{\Delta x}$$

$$=[\sin(x+\Delta x)+\sin x]\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}.$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\sin x\cdot\cos x.$$

即复合函数$y=(\sin x)^2$的导数$\frac{dy}{dx}$等于$y=u^2$及$u=\sin x$这两个函数的导数之积：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

上面的求导公式对于一般可导函数构成的复合函数也是正确的，这就是复合函数的求导法则．

定理5　设函数$u=\varphi(x)$在点x处可导，而函数$y=f(u)$在对应点u处可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x).\tag{2.16}$$

证明　设自变量在点x处有增量Δx，中间变量$u=\varphi(x)$对应的增量为Δu，于是$y=f(u)$对应的增量为Δy，由于$y=f(u)$在点u处可导，故当$\Delta u\to 0$时，有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u).$$

根据极限存在与无穷小量的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'_u(u)+\alpha. \tag{1}$$

其中，当$\Delta u\to 0$时，$\alpha\to 0$，从而（1）式可改写为

$$\Delta y=f'_u(u)\Delta u+\alpha\cdot\Delta u. \tag{2}$$

由于u是中间变量，当$\Delta x\neq 0$时Δu也有可能等于零，当$\Delta u=0$时，$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，这时我们规定$\alpha=0$，则（2）式对于$\Delta u=0$时也成立．将（2）式除以$\Delta x\neq 0$，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

注意到$u=\varphi(x)$在点x处连续，因此当$\Delta x\to 0$时，$\Delta u\to 0$，从而$\alpha\to 0$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=f'_u(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=f'_u(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=f'_u(u)\varphi'(x),\end{aligned}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=f'_u(u)\varphi'(x).$$

证毕

复合函数的求导数公式也可以写成

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x,$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

例11 求$y=(x^2+1)^{100}$的导数．

解 设$y=u^{100}$，$u=x^2+1$，由（2.16）式得

$$y'=(u^{100})'\cdot(x^2+1)'=100u^{99}\cdot 2x=200x(x^2+1)^{99}.$$

例12 求$y=\ln\mathrm{tg}x$的导数.

解 设 $y=\ln u$，$u=\mathrm{tg}x$，由(2.16)式得

$$y'=(\ln u)'\cdot(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 x$$

$$=\frac{1}{\sin x\cos x}=2\csc 2x.$$

例13 求$y=x^a$($x>0$，a为任意实数）的导数.

解 把函数$y=x^a$改写为

$$y=e^{\ln x^a}=e^{a\ln x},$$

设$y=e^u$，$u=a\ln x$，由（2.16）式得

$$y'=(e^u)'(a\ln x)'=e^u\cdot\frac{a}{x}=\frac{a}{x}\cdot e^{a\ln x}=ax^{a-1},$$

这就证明了在$x>0$时，对任意实数a，有公式

$$(x^a)'=ax^{a-1}.$$

这个公式与正整数幂函数的导数公式完全一样. 幂函数$y=x^a$的定义域因a而异. 当$x<0$时，只要这幂函数有定义，§1公式（1.5）仍成立. 这里就不再详述.

复合函数的求导数公式可以推广到两个以上中间变量的情形. 例如两个中间变量的情形，$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则复合函数$y=f[\varphi(\psi(x))]$的导数公式为

$$y'=f'_u(u)\cdot u'_x=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x).$$

例14 求 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$的导数.

解 设 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\frac{1}{x}=x^{-1}$，则有

$$y'=(e^u)'(\sin v)'(x^{-1})'=e^u\cdot\cos v\cdot(-1)x^{-2}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

把已建立起来的基本初等函数的导数公式及求导法则总结起来，可以归纳如下表：

1 微分法则

（1） $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

（2） $(uv)'=u'v+v'u$，$(Cu)'=Cu'$（C为常数）.

（3） $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$，　$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$　$(v\neq0)$.

（4） 设$y=f(x)$的反函数为$x=\varphi(y)$，则$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$.

（5） 设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则复合函数$y=f(\varphi(x))$的导数为 $\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$.

2 基本初等函数的导数公式

$(C)'=0$，　$(x^a)'=ax^{a-1}$，

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，　$(e^x)'=e^x$，

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，　$(a^x)'=a^x\ln a$，

$(\sin x)'=\cos x$，　$(\cos x)'=-\sin x$，

$(\mathrm{tg}x)'=\sec^2x$，　$(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2x$，

$(\sec x)'=\sec x\,\mathrm{tg}x$，　$(\csc x)'=-\csc x\,\mathrm{ctg}x$，

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$，　$(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$，

$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$，　$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$，

$$(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \qquad (\text{cth}x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.$$

以上求导公式和法则要求熟记，有了这套公式和法则，就能够求出一般初等函数的导数。

例15 求反双曲函数$\text{arsh}x$，$\text{arch}x$，$\text{arth}x$的导数。

解

$$(\text{ar sh}x)' = [\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(\text{arch}x)' = [\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (1 < x < +\infty).$$

$$(\text{arth}x)' = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}, \qquad (-1<x<1).$$

例16　求 $y=\ln|x|$ 的导数.

解　当 $x>0$ 时，$y=\ln|x|=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$.

当 $x<0$ 时，令 $-x=u$，$u>0$，则

$$y=\ln|x|=\ln(-x)=\ln u,\quad u=-x.$$

据复合函数微分法则，有

$$y'=(\ln u)'(-x)'=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}.$$

综上所述，不论 $x>0$ 或 $x<0$，都有 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

例17　求 $y=x^{\sin x}$ 的导数.

解　将函数改写为 $y=e^{\sin x\ln x}$，看作是由函数 $y=e^u$，$u=\sin x\ln x$ 复合而成的复合函数，则有

$$\begin{aligned}y&=(e^u)'(\sin x\ln x)'\\&=e^u\left(\cos x\ \ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\\&=e^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ \ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\\&=x^{\sin x}\left(\cos x\ \ln x+\frac{\sin x}{x}\right).\end{aligned}$$

例18　求 $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$ 的导数(其中 a，b 为常数).

解　把函数改写为

$$y=\ln(x+a)-\frac{1}{2}\ln(x^2+b^2)+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b},$$

类似地，如果二阶导数$f''(x)$仍是可导函数，对二阶导数再求一次导数便得到$f(x)$的三阶导数，记为y'''或$f'''(x)$．如此类推，一般地，设已经有了$y=f(x)$的$(n-1)$阶导数$y^{(n-1)}$，则$[y^{(n-1)}]'$就称为$y=f(x)$的n阶导数，并记为

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\quad \text{或}\quad \frac{d^nf}{dx^n}.$$

二阶或二阶以上的导数，统称为$f(x)$的高阶导数．

由此可见，求高阶导数时，只要将函数$y=f(x)$对x逐次连接地求导数，并不需要什么新的方法，前面学过的求导数的公式和法则，都可以应用来求高阶导数．但是对于一些应用较多的重要函数，则要求学会建立这些函数的n阶导数的一般表达式．

例19 设 $y=ax^4-bx^3+c$，求 y'''．

解 $y'=4ax^3-3bx^2$，$y''=12ax^2-6bx$，

$y'''=24ax-6b$．

例20 试证明：函数$x=\sqrt{2t-t^2}$满足等式

$$x^3x''+1=0.$$

证明 $x=\sqrt{2t-t^2}=(2t-t^2)^{\frac{1}{2}}$，

$$x'=\frac{1}{2}(2t-t^2)^{-\frac{1}{2}}(2-2t)=(2t-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-t),$$

$$\begin{aligned}x''&=-\frac{1}{2}(2t-t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(1-t)^2-(2t-t^2)^{-\frac{1}{2}}\\&=-(2t-t^2)^{-\frac{3}{2}}[(1-t)^2+(2t-t^2)]\\&=-[(2t-t^2)^{\frac{1}{2}}]^{-3}\\&=-x^{-3}\\&=-\frac{1}{x^3},\end{aligned}$$

从而有 $\quad x^3 x'' + 1 = 0$.

例21 求指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的 n 阶导数.

解 $y' = a^x \ln a$, $\quad y'' = a^x (\ln a)^2$, $\cdots$,

假设 $y^{(n-1)} = a^x (\ln a)^{n-1}$, 则

$$y^{(n)} = [a^x (\ln a)^{n-1}]' = (a^x)' (\ln a)^{n-1} = a^x (\ln a)^n.$$

于是得到 $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

特别是当 $a = e$ 时, 注意到 $\ln e = 1$, 则有

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

例22 求正弦函数 $y = \sin x$ 的 n 阶导数.

解 $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

假设 $\quad y^{(n-1)} = \sin\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right]$

则有 $\quad y^{(n)} = \cos\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \sin\left[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

于是得到 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

类似可推得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例23 设函数$u=u(x)$，$v=v(x)$在x点处都有直到n阶的导数，求其乘积$y=u(x)v(x)$在x点处的n阶导数.

解 $(uv)'=u'v+uv'$,

$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$,

$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$,

$\cdots\cdots$,

用数学归纳法可以证明

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1!}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

上式称为莱布尼兹(Leibniz)公式. 把它和二项式定理展开式

$$(u+v)^n=u^nv^0+\frac{n}{1!}u^{n-1}v^1+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{n-k}v^k+\cdots+u^0v^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{n-k}v^k$$

对比，把k次幂换成k阶导数，函数的零次幂就理解为函数本身，

就得到莱布尼兹公式：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

例24 求$y=x^2e^{ax}$的10阶导数$y^{(10)}$.

解 设$u=e^{ax}$，$v=x^2$，则

$$u^{(k)}=a^k e^{ax} \quad (k=1, 2, \cdots, 10),$$

$$v'=2x, \ v''=2, \ v^{(k)}=0 \quad (k=3, 4, \cdots, 10),$$

利用莱布尼兹公式，便得到

$$\begin{aligned}y^{(10)}=(uv)^{(10)}&=(e^{ax})^{(10)}x^2+\frac{10}{1!}(e^{ax})^{(9)}(x^2)'\\&\quad+\frac{10(10-1)}{2!}(e^{ax})^{(8)}(x^2)''\\&=a^{10}e^{ax}x^2+10a^9e^{ax}(2x)+\frac{10\cdot 9}{2}a^8e^{ax}\cdot 2\\&=(a^2x^2+20ax+90)a^8e^{ax}.\end{aligned}$$

五 相关变化率

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着．这几个变量并不是孤立地变化，而是相互联系，相互依从并遵循着一定的规律变化着．假若，这几个变量又同是另一个变量的可导函数．那么，这几个变量的变化率之间也必定存在着某种依赖关系．这种相互依赖的变化率就称为相关变化率．这是在导数应用中经常遇到的问题．

例25 一气球从距离观察员A点500m的B点处离开地面上升，当此气球的高度为500m时，其上升的速率为$v=140\mathrm{m/min}$．问此时观察员的仰角的增加率是多少？

解 气球离开地面升空到时刻t，其上升高度达到$h=h(t)$，此时观察员的视线之仰角为$\theta=\theta(t)$，由直角三角形ABC的边角关系（图3-9）有

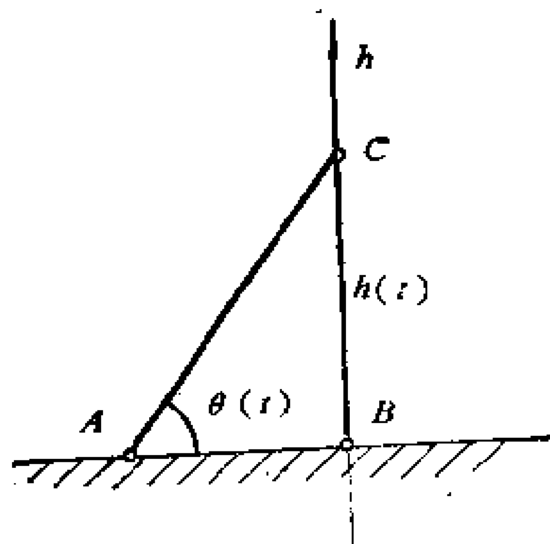


图 3-9

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{h}{500}，\text{或}\quad \theta=\operatorname{arc\ tg}\frac{h}{500}.$$

其中$h=h(t)$，$\theta=\theta(t)$.

上式左、右两边对时间 t 求导数，得到仰角θ对t的变化率，

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+\left(\frac{h}{500}\right)^2}\cdot\frac{1}{500}\quad\frac{dh}{dt},$$

据题设当$h=500$m时$\frac{dh}{dt}=140$m/min，于是

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+\left(\frac{500}{500}\right)^2}\cdot\frac{1}{500}\cdot 140$$

$$=\frac{7}{50}\quad(\text{rad/min}).$$

即气球上升到高空500m时，观察员的仰角的变化率为$\frac{7}{50}$rad/min.

§3　函数微分的概念

导数的概念来源于函数增量与自变量增量之比的极限．这一节将从求函数微小增量的近似值，引进微分学的另一个重要概念——函数的微分．微分与导数有着密切的关系，导数、微分及它们的应用构成了微分学的重要内容．

一　微分的概念

在考察函数的变化时，常常要计算当自变量的值有微小的改变时，函数值相应地改变了多少，即在x_0点处自变量有增量Δx，计算$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$的值．如果函数$y=f(x)$比较复杂时，计算$\Delta y$就很麻烦，因此，需要寻找求函数增量$\Delta y$的一个既简单而又有一定精确度的近似表达式，下面先研究一个实际问题．

例1　设有正方形的金属薄片，加热后边长由x_0伸长到$x_0+\Delta x$（图3-10），问此金属薄片的面积增加了多少？

解　设正方形金属薄片的边长为x，面积为y，则y是边长x的函数：$y=x^2$．金属薄片加热后边长由x_0伸长到$x_0+\Delta x$，可以看

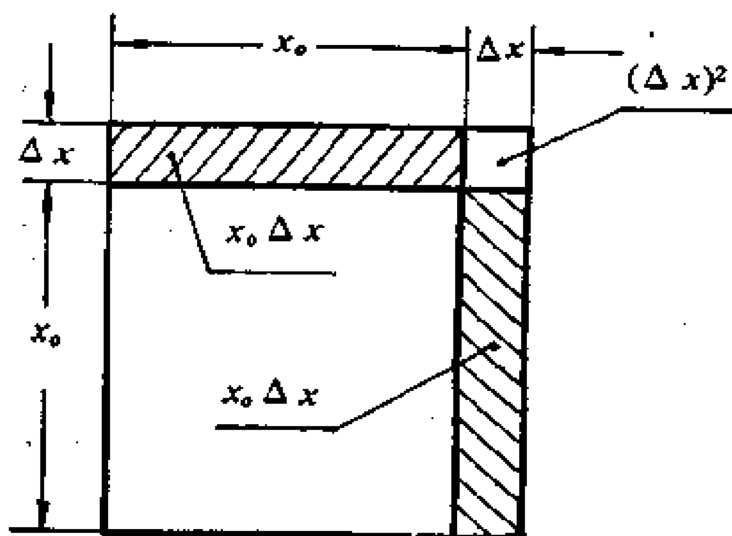


图 3-10

作自变量x在x_0点处有增量Δx，求金属薄片面积增加的量就是面积函数$y=x^2$的增量.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2$$
$$=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

现在来分析应该怎样寻找求Δy的近似值. 既然是求近似值，自然要达到两个要求：一是近似值要易于用自变量的增量Δx来表达；二是所产生的误差要足够小.

由Δy的表达式可以看出，Δy由两部分组成：第一部分是关于Δx的线性部分$2x_0\Delta x$（图中阴影部分），第二部分是关于Δx的高次幂部分$(\Delta x)^2$（图中双重阴影部分）.

显然第一部分容易计算，而第二部分，当$\Delta x\to 0$时，$(\Delta x)^2$是比Δx高阶的无穷小，即$(\Delta x)^2=o(\Delta x)$. 因此，当边长的增量Δx很微小时（即$|\Delta x|$很小时），就可以舍去高阶无穷小部分，而取Δx的线性部分$2x_0\Delta x$作为面积增量Δy的近似值，即

$$\Delta y\approx 2x_0\Delta x.$$

类似地，如函数$y=x^3$，当自变量在x_0点处有增量Δx时，函数$y=x^3$相应的增量Δy可表达为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+[3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3].$$

第一部分是关于Δx的线性部分$3x_0^2\Delta x$，第二部分是关于Δx的高阶无穷小部分$[3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]$（当$\Delta x\to 0$时），可以取$3x_0{}^2\Delta x$作为函数$y=x^3$的增量$\Delta y$的近似值.

综上所述，对于一般函数$y=f(x)$，如果它满足一定的条件，函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可以分解两部分：

$$\Delta y=(\Delta x\text{的一次项})+(\Delta x\text{的高次项}),$$

可以取Δx的线性函数作为Δy的近似值，而产生的误差是比Δx高阶的无穷小（当$\Delta x\to 0$）. 据此下面给出函数微分的定义.

定义 设函数$y=f(x)$在x_0点的某个邻域$U(x_0,\ \delta)$内有定义，当自变量x在x_0点处有增量Δx（设$(x_0+\Delta x)\in U(x_0,\ \delta)$）时，函

数$y=f(x)$相应的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

可表示为

$$\Delta y=k\Delta x+\alpha, \tag{3.1}$$

其中k是不依赖于Δx的常数，α是当$\Delta x\to 0$时，比Δx高阶的无穷小（即$\alpha=o(\Delta x)$），则称$k\Delta x$为函数$y=f(x)$在x_0点处的微分，记作$dy|_{x=x_0}$，或$df(x_0)$，即

$$dy|_{x=x_0}=k\Delta x.$$

这时也称函数$y=f(x)$在x_0点处可微分或可微.

由微分的定义可知：函数的微分$k\Delta x$是Δx的线性函数，而且函数的增量Δy与微分之差$\Delta y-dy=\alpha$是比Δx高阶的无穷小（当$\Delta x\to$

即：当$\Delta x\to 0$时，$\beta\Delta x$是比Δx高阶的无穷小，依微分的定义可知函数$y=f(x)$在x_0点处可微.

必要性. 设函数$y=f(x)$在x_0点处可微. 依定义有

$$\Delta y=k\Delta x+\alpha. \tag{3.1}$$

其中，k是不依赖于Δx的常数，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$. 在(3.1)式两边除以$\Delta x\neq 0$，并令$\Delta x\to 0$取极限，便得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(k+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)$$

$$=k+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}=k.$$

这就证明了，若函数$y=f(x)$在x_0点处可微，则它在x_0点处必可导，且$k=f'(x_0)$. 证毕

以上定理说明，函数$y=f(x)$在一点处可微与可导是等价的. 在本书中可微与可导两词互相通用，而且当函数$y=f(x)$在x点处可微时，必有

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{3.2}$$

在(3.2)式的右端一般与x及Δx有关，当x给定时该式右端只与Δx有关，并且当$|\Delta x|$很小时，有近似公式

$$\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x.$$

到现在为止，自变量x的微分还没有明确的定义. 通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分，记为$dx=\Delta x$. 于是(3.2)式可以改写为

$$dy=f'(x)dx. \tag{3.3}$$

将上式两端除以dx，便得

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

这就说明，函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$等于函数的微分dy与自变量

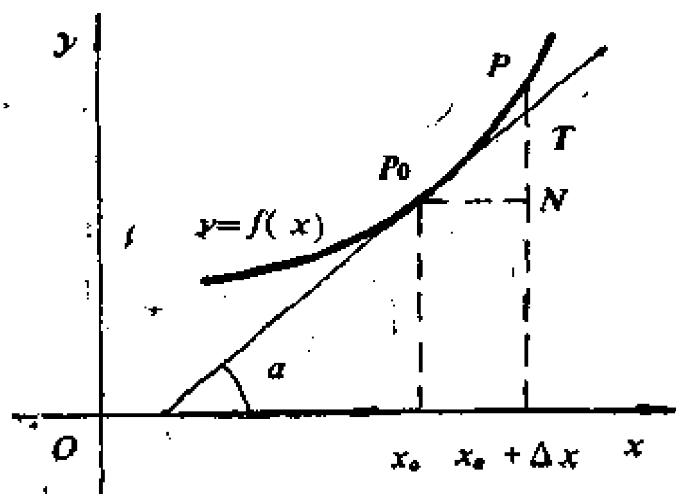


图 3-11

在点$P_0(x_0, y_0)$处切线的纵坐标的相应增量．此时，函数$y=f(x)$的增量为

$$\Delta y=NP=NT+TP=\mathrm{d}y+TP,$$

差值$\Delta y-\mathrm{d}y=TP$就是比Δx高阶的无穷小（当$\Delta x\to 0$时），因此在P_0点的邻近可以用该点的切线段近似代替曲线段．

三　微分公式

1　基本初等函数的微分公式　因为函数的可导性与可微性是等价的，所以只须把基本初等的导数乘以自变量的微分，便得到基本初等函数的微分．与导数公式相对应，可以建立起微分公式．

2　函数的和、差、积、商的微分公式

设函数$u=u(x)$，$v=v(x)$可微，由导数的四则运算法则，不难推出函数的和、差、积、商的微分公式．

（1）$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$；

（2）$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$；

（3）$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$；

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}\qquad (v\neq 0).$$

序号	导数公式	微分公式
1	$(C)'=0$	$dC=0$
2	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	$dx^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}dx$
3	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$d\ln x=\frac{1}{x}dx$
4	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$d\log_a x=\frac{1}{x\ln a}dx$
5	$(e^x)'=e^x$	$de^x=e^x dx$
6	$(a^x)'=a^x\ln a$	$da^x=a^x\ln a dx$
7	$(\sin x)'=\cos x$	$d\sin x=\cos x dx$
8	$(\cos x)'=-\sin x$	$d\cos x=-\sin x dx$
9	$(\mathrm{tg}x)'=\sec^2 x$	$d\mathrm{tg}x=\sec^2 x dx$
10	$(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2 x$	$d\mathrm{ctg}x=-\csc^2 x dx$
11	$(\sec x)'=\sec x\mathrm{tg}x$	$d\sec x=\sec x\mathrm{tg}x dx$
12	$(\csc x)'=-\csc x\cdot\mathrm{tg}x$	$d\csc x=-\csc x\cdot\mathrm{tg}x dx$
13	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
14	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
15	$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$d\mathrm{arctg}x=\frac{1}{1+x^2}dx$
16	$(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$d\mathrm{arcctg}x=-\frac{1}{1+x^2}dx$

下面仅就两个函数之商的微分公式给以证明。

根据函数微分的表达式，有

$$d\left(\frac{v}{u}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx.$$

再由两个函数之商的导数公式，有

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

于是

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vu'-uv'}{v^2}\,\mathrm{d}x=\frac{vu'\,\mathrm{d}x-uv'\,\mathrm{d}x}{v^2}.$$

注意到

$$u'\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u,\quad v'\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v,$$

所以

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

3　复合函数的微分法则　设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$均为可微函数，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的微分为

$$\mathrm{d}y=\{f[\varphi(x)]\}'\,\mathrm{d}x.$$

由复合函数的求导法则，得到

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x),$$

于是

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

注意到$\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，因此复合函数的微分又可表示为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u, \tag{3.4}$$

这里u是中间变量.

公式(3.4)与(3.3)在形式上完全一致，但是(3.3)式$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$中，$x$是自变量，而(3.4)式$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$中，$u$可以是变量的可微函数，因此不论$u$是自变量还是中间变量，函数的微分$\mathrm{d}y$的形式是一样的，微分的这一特性称为一阶微分形式不变性．这一性质大大扩充了微分基本公式的应用范围，尤其是在积分学中有很重要的作用.

要注意，如果u是中间变量，则由于一般地$\Delta u\neq \mathrm{d}u$，故

$$\mathrm{d}y\neq f'(u)\Delta u.$$

这时，只能表示为

$$dy=f'(u)du.$$

利用微分形式不变性，容易求得复合函数的微分.

例4 设$y=\ln\sin(2x+1)$，求dy.

解

$$\begin{aligned}dy&=\frac{1}{\sin(2x+1)}d\sin(2x+1)\\&=\frac{\cos(2x+1)}{\sin(2x+1)}d(2x+1)\\&=2\operatorname{ctg}(2x+1)dx.\end{aligned}$$

例5 设 $y=e^{-x^2}\cos\frac{1}{x}$，求$dy$.

解

$$\begin{aligned}dy&=d\left(e^{-x^2}\cos\frac{1}{x}\right)\\&=\cos\frac{1}{x}d(e^{-x^2})+e^{-x^2}\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)\\&=\cos\frac{1}{x}\cdot e^{-x^2}d(-x^2)-e^{-x^2}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)\\&=e^{-x^2}\left(-2x\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)dx.\end{aligned}$$

§ 4 微分在近似计算上的应用

一 函数的近似公式

工程设计和科学研究都离不开数值计算，而在计算过程中经常用到复杂的公式，或遇到烦杂的数据. 为简便起见，往往要寻求简单的近似公式或简单的计算方法. 利用微分概念能使我们在这些方面得到满意的结果.

在§3微分的概念中，已经知道，若函数$y=f(x)$在x_0点处可微且$f'(x_0)\neq 0$，微分$dy=f'(x_0)\Delta x$是函数增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$的"线性主部"，当$|\Delta x|$很小时，就有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$

如果令$x=x_0+\Delta x$，或$\Delta x=x-x_0$，上式可以改写为

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0),$$

或

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.1}$$

如果函数值$f(x_0)$及导数值$f'(x_0)$都容易计算，就可以利用公式（4.1）来近似计算函数值$f(x)$，其实质就是用（4.1）式右边的线性函数$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$来近似代替非线性函数$f(x)$。从几何上讲，就是在切点$(x_0,f(x_0))$附近，用切线段来近似代替曲线段。但要注意，只有当$|\Delta x|=|x-x_0|$很小时，上述这种代替才有意义。

特别是当$x_0=0$，$|x|$很小时，由（4.1）式便得到

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{4.2}$$

例1 设$|x|\ll 1$，试证明下列函数的近似公式：

(i) $\sin x\approx x$； (ii) $\arcsin x\approx x$；

(iii) $\operatorname{tg}x\approx x$； (iv) $\operatorname{arctg}x\approx x$；

(v) $e^x\approx 1+x$； (vi) $\ln(1+x\approx x$；

(vii) $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$.

证明 (i) 设$f(x)=\sin x$，则$f(0)=0$，$f'(0)=1$. 代入（4.2）式便得

$$\sin x\approx x.$$

(ii) 设 $f(x)=\arcsin x$，则$f(0)=0$，

$$f'(0)=\left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0}=1.$$

代入（4.2）式便得

$$\arcsin x \approx x.$$

其它几个近似公式可类似给以证明。

例2 求sin31°的近似值.

解 先把角度31°化为弧度制，得

$$31° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}.$$

利用公式（4.1）来计算正弦值sin31°，应先选取适当的可微函数 $f(x) = \sin x$，$f'(x) = \cos x$，令 $x_0 = \frac{\pi}{6}$，$x - x_0 = \frac{\pi}{180}$，这时

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

应用公式（4.1）便得

$$\begin{aligned}\sin 31° &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)\\ &\approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\\ &\approx 0.5000 + 0.0151 = 0.5151.\end{aligned}$$

例3 设有圆锥台，上底圆直径为d，下底圆直径为D，高度为l，试证明：

$$\alpha \approx 28.6° \times \frac{D-d}{l}.$$

其中，角度α如图3-12所示.

证明 据图3-12，易知

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{D-d}{2}}{l} = \frac{D-d}{2l}.$$

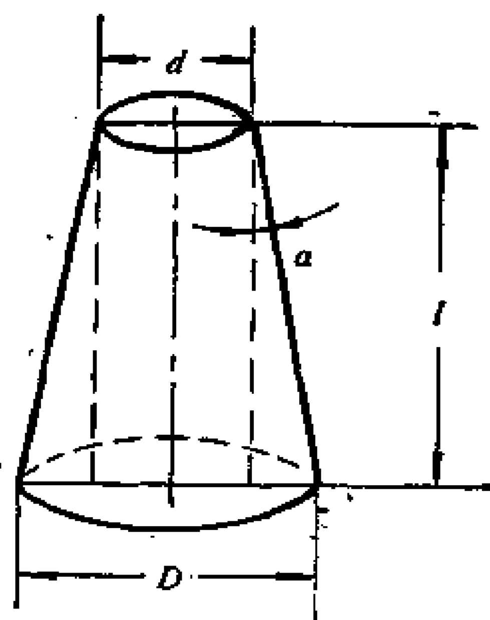


图 3-12

选取正切函数$f(x)=\mathrm{tg}x$，则$f'(x)=\sec^2x$，并令$x_0=0$，$x=\alpha$，由公式（4.2）便得

$$\mathrm{tg}\alpha\approx\mathrm{tg}0+(\sec^2 0)\alpha=\alpha.$$

于是
$$\alpha\approx\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{D-d}{2l}\ （弧度）.$$

又因为

$$1\ 弧度=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.2^\circ,$$

所以

$$\alpha\approx\frac{D-d}{2l}\times 57.2^\circ=28.6^\circ\times\frac{D-d}{l}.$$
证毕

二　函数值的误差估计

在工程设计和科学研究中，测量各种数据是常见的事．但是有些数据不能直接通过测量而得到，例如要求得钢球的体积，就先用卡尺测得钢球的直径d，然后利用公式$V=\frac{\pi d^3}{6}$计算出钢球的体积V．但是由于测量仪器的精度、测量的方法等各种原因，测得的直

径 d 的长度会有误差. 用带有误差的数据 d 计算出来的体积 V 也一定有误差. 因此掌握误差的概念和估计误差的方法是进行近似计算不可缺少的一方面.

设数 a 是某个量的真值，而数a_0是其近似值，则 $|a-a_0|$ 叫做近似值a_0的绝对误差.

如果绝对误差不超过某个正数α，即 $|a-a_0|\leqslant\alpha$，则称 α 为近似值a_0的绝对误差限.

知道了绝对误差限α，真值就在$a_0-\alpha$与$a_0+\alpha$之间，在工程上也记为 $a=a_0\pm\alpha$. 例如，如果标明某工件测量长度的结果为10±0.01m，则0.01m就是绝对误差限，而长度的真值则在9.99m和10.01m之间.

绝对误差限还不能完全说明测量的准确程度. 例如，测量长度为10m的绝对误差限，和测量长度为100m的绝对误差限都是0.01m，显然，后者测量的准确程度要高. 为此需要再引入相对误差的概念.

设数a_0是某个量的真值 a 的近似值，则此值$\left|\dfrac{a-a_0}{a_0}\right|$叫做近似值$a_0$的相对误差. 如果相对误差不超过某个正数 δ，即 $\left|\dfrac{a-a_0}{a_0}\right|\leqslant\delta$，则称 δ 为近似值a_0的相对误差限.

由于

$$\left|\frac{a-a_0}{a_0}\right|=\frac{|a-a_0|}{|a_0|}\leqslant\frac{\alpha}{|a_0|},$$

因此，可取 $\delta=\dfrac{\alpha}{|a_0|}$作为$a_0$的相对误差限.

下面利用微分来估计函数值的误差.

设已给 $y=f(x)$为可导函数，在测量自变量 x 时得到近似值 x_0，如果已知x_0的绝对误差限为α_x，即 $|x-x_0|\leqslant\alpha_x$，由此引起

函数值的近似值$f(x_0)$的绝对误差为$|\Delta y|=|f(x)-f(x_0)|$，记$\Delta x=x-x_0$，或$x=x_0+\Delta x$，由于$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$，故有

$$|\Delta y|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\approx|f'(x_0)\Delta x|\leqslant|f'(x_0)|\alpha_x,$$

其中α_x为x_0的绝对误差限．因此，可以取近似值$f(x_0)$的绝对误差限α_y为

$$\alpha_y=|f'(x_0)|\alpha_x. \tag{4.3}$$

又因为x_0的相对误差限δ_x为

$$\delta_x=\frac{\alpha_x}{|x_0|},$$

所以，$f(x_0)$的相对误差限δ_y为

$$\delta_y=\frac{\alpha_y}{|f(x_0)|}=\frac{|f'(x_0)|\alpha_x}{|f(x_0)|}=\frac{|f'(x_0)|}{|f(x_0)|}\alpha_x. \tag{4.4}$$

注意到$\delta_x=\frac{\alpha_x}{|x_0|}$，因此公式（4.4）又可以写成

$$\delta_y=\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}x_0\right|\delta_x. \tag{4.5}$$

例4 设已经测得一根圆钢横截面的直径$D_0=43$mm，并且已知其绝对误差不超过0.02mm，试求圆钢横截面面积的绝对误差限与相对误差限．

解 直径为D的圆钢横截面的面积为

$$S=f(D)=\frac{\pi}{4}D^2,$$

且$D_0=43$mm，$\alpha_D=0.02$mm，据公式（4.3）圆钢横截面面积S的绝对误差限为

$$\alpha_S=|f'(D_0)|\alpha_D=\left|\frac{\pi}{2}D_0\right|\alpha_D$$

§ 5 隐函数及参量函数的导数

一 隐函数的导数

单元函数中因变量 y 与自变量 x 的对应关系可以用不同的形式来表达．例如，前面已经见到的用变量 x 的解析式子来表达 y 与 x 之间的对应关系，如 $y=e^x+\sin^2 x$，$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$等．其特点是：因变量 y 已表达成自变量 x 的明显的关系式 $y=f(x)$．这种表达形式的函数通常称为显函数．然而也会遇到有些函数关系不是用显函数形式来表达的．例如，方程 $x+y^3-1=0$，$xy-e^x+e^y=0$，都确定了 x 与 y 之间的对应关系．比如对方程 $x+y^3-1=0$，当变量 x 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内每取一个值时，变量 y 就有唯一的确定值与之对应．依函数的定义可知，方程确定了一个函数，这种表达形式的函数通常称为隐函数．不过隐函数由自变量 x 求函数值的运算步骤不像显函数那样一目了然，只是隐含在方程之中．有时为了一目了然，也可以从方程中解出 y 的显函数表达式，称为隐函数的显化．比如，从方程 $x+y^3-1=0$，可以解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$．由方程的根的定义可知，如果把显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$ 代回原方程，便得到恒等式

$$x+(\sqrt[3]{1-x})^3-1=0.$$

但是隐函数的显化有时很困难，甚至是不可能的．例如，从方程 $xy-e^x+e^y=0$ 解出 y，根本是不可能的．因此，我们给出以下隐函数一般的定义．

一般地，对 x，y 的二元方程 $F(x,y)=0$，如果存在函数 $y=f(x)$，使得 $F[x,f(x)]=0$，则称 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数．

隐函数有时是多值的．例如，方程 $x^2+y^2=1$ 定义了 y 是 x 的隐函数，由于 x 可取的每一个值 $(-1\leqslant x\leqslant 1)$，除 $x=\pm 1$

外都对应了两个y值，对于这样的函数，约定只取定其中的一支．至于如何选择这单值支，有时是任意的，有时则要依其它条件而定．

方程$F(x, y)=0$的左端$F(x, y)$应满足什么条件，才能确定一个隐函数？这个隐函数是否存在导数？将在本书的下册多元函数微分学一章中讨论．这里不妨设方程$F(x, y)=0$确定了y为x的隐函数（记为$y=f(x)$），且为可导函数，于是有恒等式

$$F[x, f(x)]\equiv 0.$$

恒等式的两边对x求导数应相等，再从等式中解出$f'(x)$，即为所求的隐函数之导数．在具体求隐函数的导数时，不需要把方程$F(x, y)=0$中的y换为$f(x)$，只要将方程$F(x, y)=0$中的y视为x的函数，并把等式看成恒等式，两边对x求导数，再从中解出y'即可．

例1　设由方程$xy-e^x+e^y=0$确定隐函数y，求y'及$y'|_{x=0}$．

解　把方程$xy-e^x+e^y=0$中的y视为由该方程所确定的隐函数$y=f(x)$，把方程视为恒等式，那么e^y就是x的复合函数，恒等式的两边对x求导数，便得

$$y+xy'-e^x+e^y\cdot y'=0,$$

解出y'，得

$$y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

把$x=0$代入方程$xy-e^x+e^y=0$中，得$e^y-1=0$，解出$y=0$，于是有

$$y'|_{x=0}=\left.\frac{e^x-y}{e^y+x}\right|_{x=0}=1.$$

例2　求椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$在点$M(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$处的切线

方程.

解 由隐函数微分法，方程$\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$的两边对x求导数得

$$\frac{x}{2}+2yy'=0,$$

$$y'=-\frac{x}{4y}.$$

当$x=\sqrt{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，代入y'中得$y'\Big|_{x=\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$.

由导数的几何意义可知，过点M的切线的斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}.$$

于是椭圆过点M的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}),$$

即
$$x+2y-2\sqrt{2}=0.$$

例3 设$e^y-xy=0$，求y'及y''.

解 由隐函数微分法，有

$$e^y\cdot y'-y-xy'=0,$$

于是有

$$y'=\frac{y}{e^y-x}.$$

上式两边再对x求导数，仍然把y视为x的函数$y=f(x)$，便得

$$y''=\frac{y'(e^y-x)-y(e^y\cdot y'-1)}{(e^y-x)^2}$$

$$=\frac{y+y'(e^y-x-ye^y)}{(e^y-x)^2}.$$

将 $y'=\frac{y}{e^y-x}$ 代入 y'' 中，并注意到 $e^y=xy$，化简后便得

$$y''=\frac{y(2y-2-y^2)}{x^2(y-1)^3}.$$

求 y'' 时，也可以由

$$e^y y'-y-xy'=0$$

出发，两边再对 x 求导数得

$$e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''-y'-y'-xy''=0.$$

解出 y''，得

$$y''=\frac{2y'-e^y\cdot(y')^2}{e^y-x}.$$

用上面的方法化简，结果也得

$$y''=\frac{y(2y-2-y^2)}{x^2(y-1)^3}.$$

例 4 求函数 $y=x^{\sin x}$（$x>0$）的导数。

解 这种形式的函数属于 $y=f(x)^{\varphi(x)}$ 类型的函数，通常称为幂指函数．下面用"取对数微分法"来求其导数．

由 $y=x^{\sin x}$，两边取对数得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x,$$

应用隐函数微分法，方程的两边对 x 求导数得

$$(\ln y)'_y\cdot y'_x=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x},$$

即

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

故

$$y' = y\left(\cos x\ \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

对于一般的幂指函数 $y = f(x)^{\varphi(x)}$ ($f(x) > 0$) ，如果 $f(x)$，$\varphi(x)$都是可导函数，那么可以仿照例 4，用“取对数微分法”来求导数y'.

除了幂指函数之外，凡取对数后其导数易求的函数，都宜于用取对数微分法来求其导数.

例 5 求函数 $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$的导数.

解 本例的函数是由乘、除、开方等运算所构成的，直接求导数较烦. 如果用取对数微分法就比较简单了.

将原式两边取对数，得

$$\ln y = \ln\left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}(\ln(1-x) - \ln(1+x)),$$

应用隐函数微分法，把上式两边对x求导数，得

$$(\ln y)'_y \cdot y'_x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\cdot(-1) - \frac{1}{1+x}\right],$$

即

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x^2}.$$

所以

$$y' = y\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$= x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(1-\frac{x}{1-x^2}\right).$$

二　参量函数的导数

在解析几何中研究动点的运动轨迹，或在力学中讨论物体运动的轨迹时，经常要用到参量方程，例如把物体以初速度v_0，仰角φ抛射出去，如果忽略空气阻力不计，则抛射物体运动的轨迹方程为

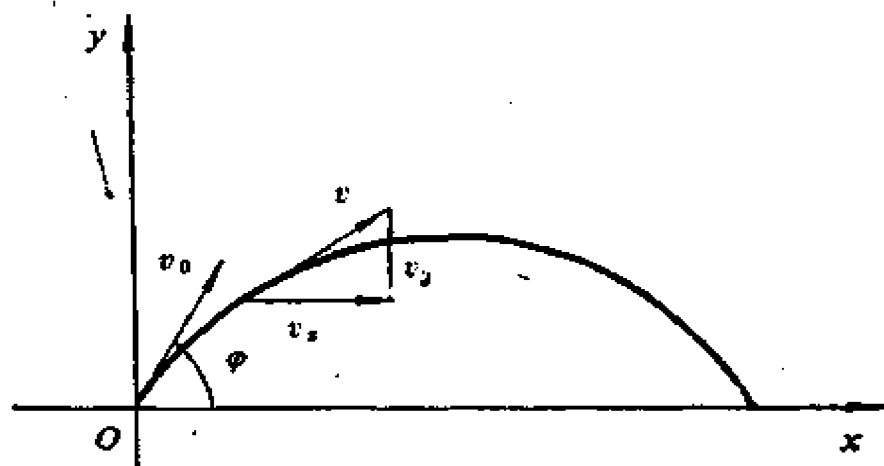


图 3-13

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\varphi, \\ y = v_0 t\sin\varphi - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases} \tag{1}$$

这里t是物体运动的时间，g是重力加速度，x，y是运动中抛射物体在铅直平面上的位置的横、纵坐标．式中x，y都是时间t的函数，如果把同一个t值所对应的一对x，y的值看作是变量x与y之间的一种对应，这样参量方程(1)就确定了y与x之间的函数关系．很容易由参量方程消去参量t，得到

$$y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{g \cdot \sec^2\varphi}{2v_0^2}x^2.$$

这是参量方程所确定的函数之显式.

一般地，设有参量方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad t \in I\,(\text{区间}) \tag{2}$$

如果函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，将它代入函数 $y=\psi(t)$ 中，便得

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)],$$

它是由 $y=\psi(t)$，$t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的复合函数，是由参量方程(2)确定的函数的显式. 因此，参量方程(2)确定了 y 与 x 间的函数关系. 这种函数关系所表达的函数就称为参量方程(2)所确定的函数，简称为参量函数.

在实际计算中，要从参量方程(2)中消去参量 t，得到参量函数的显式，有时是很困难的，甚至是不可能的. 因此，希望能直接从参量方程(2)求出参量函数的导数. 为此，假设函数 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 在区间 I 上可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，于是有

$$dy = \psi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt.$$

因导数是微分之商，故有

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad x = \varphi(t). \tag{5.1}$$

这就是参量函数的一阶导数公式.

如果 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 具有二阶导数，记

$$y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = g(t), \qquad y_{x^2}'' = \frac{dy'}{dx},$$

那么由参量函数

$$\begin{cases} y_x' = g(t), \\ x = \varphi(t), \end{cases} \tag{3}$$

仍按上面方法可求得二阶导数，得

$$y_{xx}''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}\varphi(t)}=\frac{g'(t)\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\dfrac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{(\varphi')^2}}{\varphi'}=\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}. \tag{5.2}$$

例6 求摆线

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

在 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的切线方程及二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 据公式（5.1），得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'}$$

$$=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的切线的斜率为

$$k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$$

$t=\frac{\pi}{2}$ 对应摆线上的点 $M\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),\ a\right)$，摆线过点 M 的切线方程为

$$y-a=1\cdot\left[x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right],$$

即

$$y = x + a\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

由前面已求出一阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{da(t-\sin t)} = \frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)}$$

$$= -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}, \ (t \neq 2n\pi, \ n\text{为整数}).$$

例7 设物体以初速度v_0，仰角φ抛射出去，若忽略空气阻力不计，则抛射物体的运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\varphi, \\ y = v_0 t\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

求抛射物体的速度的大小与方向（图3-13）。

解 在任一时刻t抛射物体的水平速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\varphi,$$

垂直速度为

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\sin\varphi - gt.$$

因此，抛射物体的速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\varphi + g^2t^2}.$$

速度v的方向就是抛射物体运动轨道的切线方向．设切线的倾角为α，则切线的斜率为

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}.$$

$$=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\rho'(\theta)\mathrm{tg}\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\mathrm{tg}\theta}, \qquad (1)$$

其中，$\rho'(\theta)=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$.

虽然$\rho'(\theta)$并非是曲线的切线的斜率，但它也与切线有关．设曲线在点$M(\rho,\ \theta)$的切线MT与OM（O为极点）间的夹角为φ，则$\varphi=\alpha-\theta$（图3-14），故有

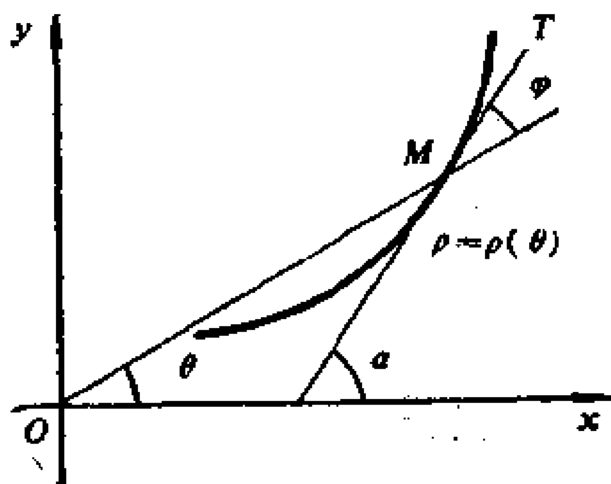


图 3-14

$$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\theta}=\frac{y'-\mathrm{tg}\theta}{1+y'\mathrm{tg}\theta}, \qquad (2)$$

将（1）的结果代入（2），便得

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} \quad 或 \quad \rho'(\theta)=\rho(\theta)\mathrm{ctg}\varphi。 \qquad (3)$$

式（3）提供了矢径与切线间的夹角φ与$\rho(\theta)$及其导数$\rho'(\theta)$之间的关系.

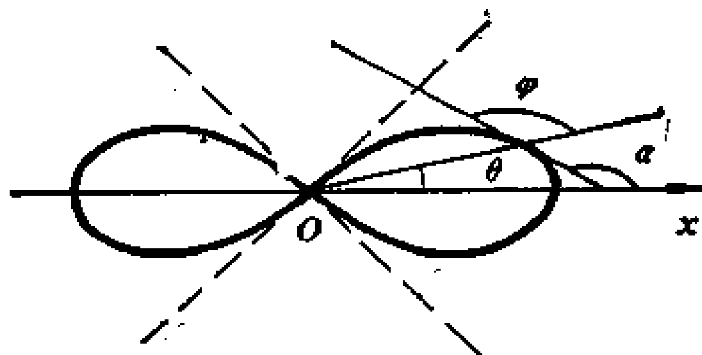


图 3-15

例8 求双纽线$\rho^2=2a^2\cos2\theta$在$\theta=\frac{\pi}{12}$的切线的斜率(图3-15).

解 应用隐函数微分法于双纽线的极坐标方程，得

$$2\rho\rho'=-4a^2\sin2\theta,$$

从而有

$$\rho'=-\frac{2a^2}{\rho}\sin2\theta.$$

应用(3)式，得

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}=-\frac{2a^2}{\rho^2}\sin2\theta$$

$$=-\operatorname{tg}2\theta=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right),$$

因此，$\varphi=\frac{\pi}{2}+2\theta$，而$\alpha=\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}+3\theta$. 当$\theta=\frac{\pi}{12}$时，求得切线的斜率为

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1.$$

显然，也可以用式(1)直接求出$\operatorname{tg}\alpha$.

第四章　导数的应用

上一章已经详尽地阐明了导数与微分的概念以及它们的密切的联系，并建立起求导数与微分的方法——微分法．本章将利用导数来研究函数的各种性态．例如，把判别函数的单调增减性问题转化为判别其一阶导数的正负号问题，把判别函数曲线的凹凸性问题转化为判别其二阶导数的正负号问题，而与此相联系的还要研究如何求函数的极大值、极小值、最大值和最小值等问题的实际应用．完成上述转化工作的理论基础就是微分学中值定理．

§1　微分学中值定理

本节要介绍罗尔（Rolle）定理，拉格朗日（Lagrange）定理及柯西（Cauchy）定理，统称为微分学中值定理．

一　罗尔定理

定理1（罗尔定理）　设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，并且在区间两端点的函数值相等 $f(a)=f(b)$，则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ（$a<\xi<b$），使得 $f'(\xi)=0$．

定理的几何解释很明显．若连续曲线 $y=f(x)$ 的弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 上，处处有不垂直于 Ox 轴的切线，并且 A、B 两点的纵坐标相等，定理的结论是 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点 C，在该点处曲线的切线平行于 Ox 轴．

证明　因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，故函数在该区间上有最大值 M 和最小值 m．这样，就有两种可能情况：

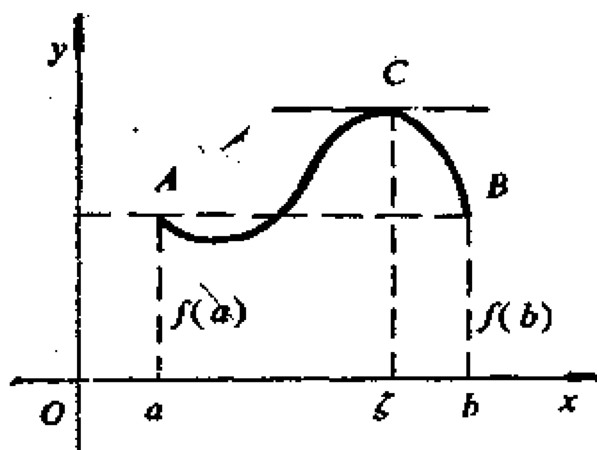


图 4-1

（1） 若$m=M$，则$f(x)$在$[a,\ b]$上恒为常数．因此，在该区间内$f'(x)=0$，区间内每一点都可以作为定理的ξ．

（2） 若$m\neq M$，则两个数m、M中至少有一个数不等于$f(a)=f(b)$．否则，$f(x)$在$[a,\ b]$上恒为常数．因此不妨设$M\neq f(a)=f(b)$，即函数$f(x)$在$[a,\ b]$的最大值不是端点处的函数值．那么在$(a,\ b)$内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使得最大值$M=f(\xi)$，从而对一切$(\xi+\Delta x)\in(a,\ b)$，都有$f(\xi+\Delta x)\leqslant f(\xi)$，或$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0$．又因为函数$f(x)$在$(a,\ b)$内可导，于是

当 $\Delta x<0$ 时，$\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0$，

$$f'_-(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

当 $\Delta x>0$ 时，$\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$，

$$f'_+(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

故必然有 $f'_-(\xi)=f'_+(\xi)=f'(\xi)=0$． 证毕

应当指出，罗尔定理所给的三个条件都同等重要，缺一不可，否则便可能得不出定理的结论。读者可结合图4-2的四个图形验证这一点。

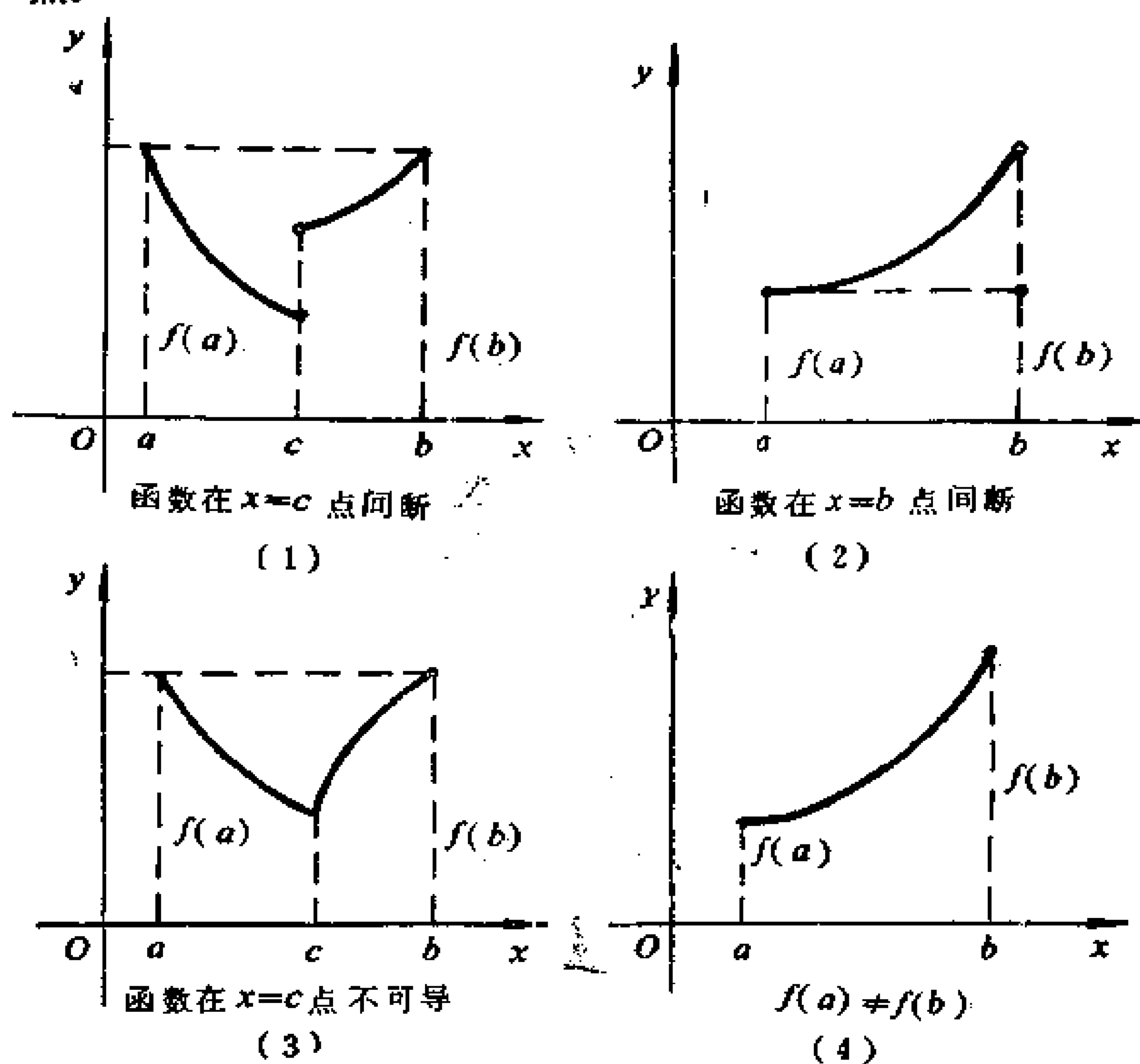


图 4-2

二　拉格朗日定理

定理2（拉格朗日定理）　设函数$y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，则在(a, b)内至少存在一点ξ（$a<\xi<b$），使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{4.1}$$

定理的几何意义是很明显的．若连续曲线$y=f(x)$的弧段$\overset{\frown}{AB}$内，处处有不垂直于Ox轴的切线，则在$\overset{\frown}{AB}$内至少有一点C，使得曲线弧在该点处的切线平行于弦$\overline{AB}$（图4-3）．

证明

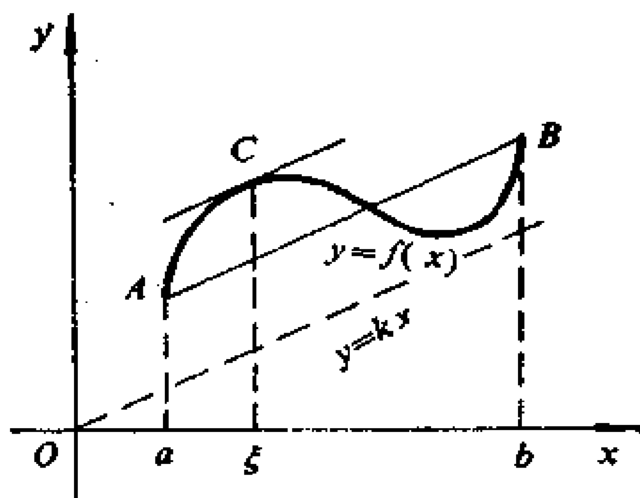


图 4-3

设比值
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k,$$

则
$$f(b)-f(a)=k(b-a),$$

即
$$f(b)-kb=f(a)-ka.$$

作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-kx$（见图4-3），由于函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，故函数$\varphi(x)$也在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，而且$\varphi(a)=\varphi(b)$，由罗尔定理可知在(a, b)内至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$，使得$\varphi'(\xi)=0$，即
$$f'(\xi)-k=0.$$

所以
$$f'(\xi)=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

显然，公式(4.1)对于$b<a$时也成立．公式(4.1)也叫做拉格朗日中值公式．

为了便于应用，公式(4.1)又常写成下面几种形式：

（1） $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$；（4.2）

（2） 设$x\in[a, b]$，$x+\Delta x\in[a, b]$（$\Delta x>0$或$\Delta x<0$），那么在区间$[x, x+\Delta x]$或在区间$[x+\Delta x, x]$上，(4.1)式就可以写成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x. \qquad (4.3)$$

其中，ξ在x与$x+\Delta x$之间．

（3） 如果令$\theta=\frac{\xi-x}{\Delta x}$，则$0<\theta<1$，且$\xi=x+\theta\Delta x$．公式(4.3)可改写为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x. \qquad (4.4)$$

若记$y=f(x)$，那么(4.4)式就可以写成

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \ (0<\theta<1).$$

众所周知，一个函数的微分$dy=f'(x)\Delta x$是该函数在x点处的增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$的近似表达式，即

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x,$$

这种近似表达式所产生的误差只有当$\Delta x\to 0$时才趋于零．而由(4.4)式有准确表达式

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

因此把(4.4)式叫做有限增量公式．它准确地表达出：函数在一个区间上的增量与函数在该区间内某点处的导数之间的关系，即函数的增量与函数的导数可以互相直接表达．这一点在理论上有重要的意义．

作为拉格朗日定理的应用，下面将导出重要的推论．

推论1 如果函数$f(x)$在区间I内的导数恒等于零，则$f(x)$在区间I内恒为一常数．

证明 在区间I内任取两点x_0、$x(x_0\neq x)$，应用拉格朗日定理

便得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0).$$

这里，ξ介于x与x_0之间．由假设$f'(\xi)=0$，所以

$$f(x)=f(x_0)=\text{常数}.$$

因为x、x_0是区间I内的任意两点，上面等式说明：函数$f(x)$在I内的函数值总是相等．所以，$f(x)$在区间I内恒为一常数．

应用推论1可推出如下结果．

推论2 如果两个函数的导数在区间I内恒相等，则此两函数之差在区间I内恒为一常数．

推论3 如果函数$f(x)$在区间I内的导数$f'(x)$恒为一常数，则$f(x)$在区间I内为线性函数．

例1 已知函数$f(x)=x^2$在区间$[1,2]$上满足拉格朗日定理的条件，求拉格朗日公式中的ξ及θ．

解 求导数，$f'(x)=2x$．

由公式(4.2)，有

$$f(2)-f(1)=2\xi(2-1)，\text{解得 } \xi=\frac{3}{2}.$$

由公式(4.4)，有

$$f(2)-f(1)=2(1+\theta)(2-1)，\text{解得 } \theta=\frac{1}{2}.$$

例2 证明当$x>0$时，

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证明 设函数$f(x)=\ln(1+x)$，当$x>0$时，函数$f(x)$在区间$[0,x]$上满足拉格朗日定理的条件，应用公式(4.2)有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)，\quad 0<\xi<x.$$

考虑到 $f(x)=\ln(1+x)$，$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，从而有

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

又因为 $0<\xi<x$，所以

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证毕

例3 设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，且$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=k$存在，则$f'_+(a)$也存在，且

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a^+} f'(x)=k.$$

证明 设$\Delta x>0$，$a+\Delta x\in(a, b)$，则函数$f(x)$在$[a, a+\Delta x]$上满足拉格朗日定理的条件，因此有

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(\xi),\ a<\xi<a+\Delta x.$$

显然当$\Delta x\to 0^+$时，$\xi\to a^+$，从而有

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}f'(\xi)$$
$$=\lim_{\xi\to a^+}f'(\xi)=k,$$

即 $f'_+(a)=k.$

同理还可以证明，如果$\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$存在，则$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$.

必须提醒读者注意：当$f'_+(a)$存在时，并不能保证导函数的极限$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$存在，即本例的逆命题是不成立的。

三 柯西定理

定理3（柯西定理） 设函数$f(x)$及$\varphi(x)$在闭区间$[a, b]$上

理，有

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\eta)(b-a).$$

其中，$a<\eta<b$，据定理所设$\varphi'(\eta)\neq 0$，又$b-a\neq 0$，从而推得$\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$.

仿照拉格朗日定理的证明，仍设

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=k,$$

或

$$f(b)-k\varphi(b)=f(a)-k\varphi(a).$$

据此，作辅助函数

$$\psi(x)=f(x)-k\varphi(x).$$

易验证，$\psi(x)$在$[a, b]$上满足罗尔定理的条件，且有

$$\psi'(x)=f'(x)-k\varphi'(x).$$

应用罗尔定理，在(a, b)内至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$，使得$\psi'(\xi)=0$，即$f'(\xi)-k\varphi'(\xi)=0$，又$\varphi'(\xi)\neq 0$，于是

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=k,$$

从而推得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

证毕

上面所讲的罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理有以下的关系.

如果在柯西定理中，取$\varphi(x)=x$，那么，$\varphi(b)-\varphi(a)=b-a$，$\varphi'(x)=1$，公式(4.5)就写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\quad(a<\xi<b).$$

这就是拉格朗日公式.

如果在拉格朗日定理的假设中，增加条件$f(b)=f(a)$，那么拉格朗日公式(4.1)中的右端

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

从而得罗尔定理的结论$f'(\xi)=0$（$a<\xi<b$）.

微分学中值定理，特别是拉格朗日定理的结论

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),$$

其中ξ在x_0与x之间，这一公式把函数值与其导数值直接用等号联系起来，为利用导数来研究函数的性态奠定了理论基础，使导数成为研究函数性态的有力工具. 因此本节介绍的一系列的重要定理是微积分理论的基础，今后经常会用到，要给予足够的重视.

§2 罗比塔（L'Hospita）法则

求函数的极限时，常常会遇到当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数$f(x)$与$\varphi(x)$都是无穷小，或都是无穷大，那末$f(x)$与$\varphi(x)$比值的极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

可能存在，也可能不存在. 通常把两个无穷小之比的极限式称为“$\frac{0}{0}$”型未定式. 把两个无穷大之比的极限式称为“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式. 对于这一类未定式的极限即使存在，也不能用“商的极限等于极限之商”来求其极限. 下面介绍求未定式极限的一种简单而有效的方法——罗比塔法则.

一 $\frac{0}{0}$型未定式

定理1（法则1） 设

（1） 函数$f(x)$与$\varphi(x)$在x_0点的某邻域内(x_0点可除外)有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$；

（2） 在x_0点的某邻域内（x_0点可除外）$f'(x)$与$\varphi'(x)$都存在，且$\varphi'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$存在(或为$\infty$)。

则极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$存在（或为$\infty$），且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.1}$$

证明 由定理的条件（2）可知函数$f(x)$与$\varphi(x)$在x_0点的某邻域内（x_0点除外）连续，再由条件（1）在x_0点处补充定义，使得$f(x_0)=\varphi(x_0)=0$．这样，函数$f(x)$与$\varphi(x)$在x_0点处也连续．

设x为x_0点的某邻域内异于x_0的任一点，那末，在区间$[x_0, x]$或$[x, x_0]$上，函数$f(x)$与$\varphi(x)$满足柯西定理的条件．故至少存在一点ξ，使得

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}).$$

由于ξ在x_0与x之间，故当$x\to x_0$时$\xi\to x_0$，再由条件（3）便得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

这就是说，当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$存在时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$也存在，且等

于 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$；当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$.

证毕

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ 又呈 $\frac{0}{0}$ 型未定式，且导函数 $f'(x)$ 与 $\varphi'(x)$ 仍能满足定理 1 所需的条件，那末可以继续用罗必塔法则，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

并且可以仿此类推下去.

推论 设

（1） 函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $|x|>N>0$ 时有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$；

（2） 当 $|x|>N$ 时，$f'(x)$ 与 $\varphi'(x)$ 都存在，且 $\varphi'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ 存在（或为 ∞）.

则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ 存在（或为 ∞），且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.2}$$

证明 令 $x=\frac{1}{t}$，则当 $x\to\infty$ 时，必然有 $t\to 0$，由定理 1 便有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varphi\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{\varphi'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

证毕

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

解 属 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式. 由定理 1，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 属 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式. 接连用二次定理 1，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

必须指出，在连续使用定理 1 时，每使用一次都必须检查所求极限式是否属于 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，定理 1 的条件是否得到满足. 例如上例中 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$ 已不是未定式，不能对它再应用罗必塔法则，否则会导致错误的结果.

例 3 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$.

解 属$\dfrac{0}{0}$型未定式，如果直接应用罗必塔法则，计算会很烦杂. 注意到，当$x\to0$时，$x\sim\sin x$，利用等价无穷小的代换，便有

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}$.

解 属于$\dfrac{0}{0}$型未定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$=1.$$

二 $\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

定理2（法则2） 设

（1） 函数$f(x)$与$\varphi(x)$在x_0点的某邻域内(x_0点可除外)有定

义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$；

（2） $f'(x)$与$\varphi'(x)$在x_0点的某邻域内（x_0点可除外）存在，且$\varphi'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$存在（或为$\infty$）。

则极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$存在（或为$\infty$），且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.3}$$

推论 设

（1） 函数$f(x)$与$\varphi(x)$在$|x|>N>0$时有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$；

（2） 当$|x|>N$时，$f'(x)$与$\varphi'(x)$都存在，且$\varphi'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$存在（或为$\infty$）。

则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$存在（或为$\infty$），且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

本定理及推论的证明从略。

例5 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$。

解 属$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式。

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\cos x=1.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}$（$n$ 为正整数）.

解 属 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^n)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$（$n$ 为正整数）.

解 属 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

从例 6 及例 7 的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

可以得到下面的结果：在x充分增大的过程中，$\ln x$、x^n、e^x三个函数中的e^x增大得最快，其次是x^n，增大得最慢的是$\ln x$.

三、其它类型的未定式

除了上述$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式外，尚有其它类型的未定式．例如当$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$时，那末$\lim[f(x)g(x)]$是"$0\cdot\infty$"型未定式．如此类推，可知还有$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0型未定式．求这些类型未定式的极限，通常是把它们先化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，然后再用罗比塔法则进行计算．

例 8 求$\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln x$（$n>0$）．

解 属$0\cdot\infty$型未定式，把$x^n\ln x$改写为

$$x^n\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}.$$

当$x\to0^+$时，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}$就是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式．故

$$\lim_{x\to0^+} x^n\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-x^n}{n}\right)=0.$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解 属$\infty-\infty$型未定式，上式通分后化为

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}.$$

当$x\to0^+$时，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\mathrm{ctg}x}{\csc x}$属$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，故

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\mathrm{ctg}x}{\csc x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\cdot\csc^2x}{-\mathrm{ctg}x\cdot\csc x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\mathrm{ctg}x}{\csc x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\mathrm{ctg}x}{\csc x}}=e^0=1.$$

从以上各例可以看到，罗比塔法则是求未定式极限行之有效的一种方法．如果能与其他求极限的方法配合使用，例如能化简时应尽可能先化简，可以应用等价无穷小替换或应用两个重要极限时，应尽可能应用，则可使运算更为简练，达到事半功倍．

但是必须指出，罗比塔法则毕究是求未定式极限的方法之一．当法则的条件满足时，所求的未定式的极限存在（或为∞），但是当$\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$的极限不存在时（除∞外），就不能得出$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}$不存在的结论．这时，$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}$仍可能存在．例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

极限不存在．然而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

§3 函数的增减性与极值

一 函数增减的必要条件与充分条件

1 函数单调增减的必要条件

根据第一章中函数在区间内单调增减性的定义可知，如果函数

$f(x)$在区间（a，b）内是单调增加的，那么函数曲线$y=f(x)$在（a，b）内随着x的增大而上升．在几何图形上看，上升曲线段上所有切线的倾斜角都是锐角，即斜率$\mathrm{tg}\alpha=f'(x)>0$（图4-5）．如果函数$f(x)$在区间（$a$，$b$）内是单调减少的，那么函数曲线$y=f(x)$在（$a$，$b$）内随着$x$的增大而下降．在几何图形上看，下降曲线段上所有切线的倾斜角都是钝角，即斜率$\mathrm{tg}\alpha=f'(x)<0$（图4-6）．这就说明在函数可导的条件下，函数的增减性与导数的正负性有着密切的关系．

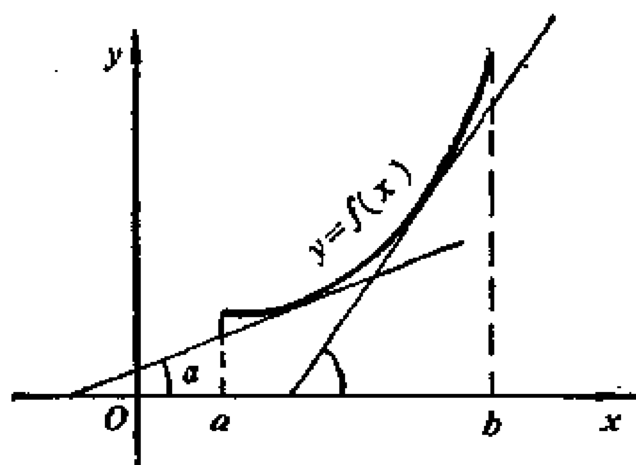


图 4-5

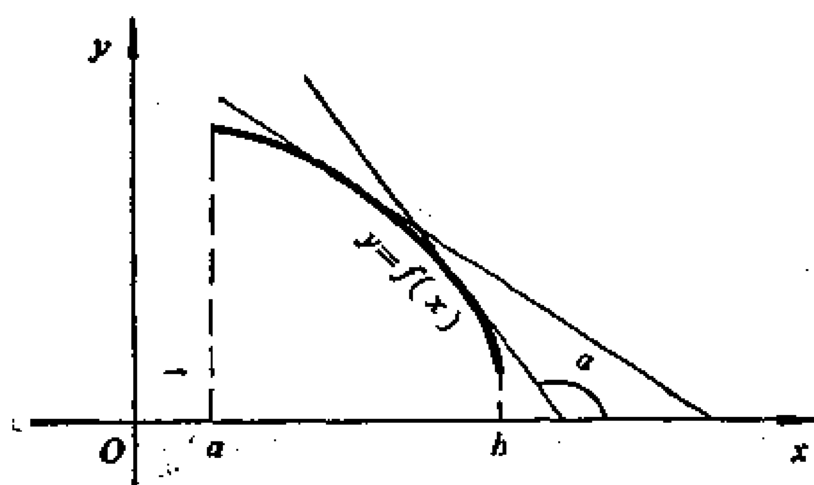


图 4-6

定理1 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，则当$f(x)$在$[a, b]$上严格单调增（减）时，在(a, b)内必有$f'(x) \geq 0$（≤ 0），且在(a, b)的任何子区间中等号不恒成立.

证明 为了确定起见，不妨设$f(x)$在$[a, b]$上严格单调增，则对任意的$x \in (a, b)$及$x+\Delta x \in (a, b)$，当$\Delta x < 0$时，有$f(x+\Delta x) < f(x)$；当$\Delta x > 0$时，有$f(x+\Delta x) > f(x)$. 故恒有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0,$$

由于$f(x)$在(a, b)内可导，于是有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

这里等号不能在(a, b)的任何子区间（长度不为0）内恒成立. 否则在此子区间内$f(x)=$常数，这与$f(x)$是严格单调增的假设矛盾.

仿此，可证当$f(x)$为严格单调减少时，必有$f'(x) \leq 0$.

证毕

2 函数单调增减的充分条件

定理2（函数单调增减的充分条件） 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a, b)内可导，$f'(x) \geq 0$（$f'(x) \leq 0$），且$f'(x)$在(a, b)的任何子区间中不恒为零，则$f(x)$在$[a, b]$上是严格单调增加的（减少的）.

证明 在$[a, b]$上任取两点x_1，x_2（$x_1 < x_2$），则函数$f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足拉格朗日定理条件，故必有ξ，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad x_1<\xi<x_2.$$

在上式中$x_2-x_1>0$，由假设$f'(x) \geq 0$，那末也有$f'(\xi) \geq 0$，于是$f(x_2)-f(x_1) \geq 0$，即$f(x_2) \geq f(x_1)$. 这里等号不能成立. 否则，如果有$x_1<x_2$，使$f(x_1)=f(x_2)$，则对任意x，$x_1<x<x_2$. 由上面已经证得的结论有$f(x_1) \leq f(x)$及$f(x) \leq f(x_2)$，由$f(x_1)=f(x_2)$，

可推得$f(x_1)=f(x)=f(x_2)$，即$f(x)$在$[x_1,x_2]$上恒相等．于是，在(x_1,x_2)内$f'(x)=0$．这与$f'(x)$在(a,b)的任何子区间中不恒为零的假设矛盾．这就证明了，对任意x_1，$x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，必有$f(x_1)<f(x_2)$．故$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加．

同理可证明$f(x)$严格单调减少的情形．　　　　　　　　证毕

把定理1及定理2合起来，就得到可导函数$f(x)$单调增减的充分必要条件：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增（减）的充分必要条件是在(a,b)内$f'(x)\geqslant 0$（$\leqslant 0$），且在(a,b)的任何子区间（长度不为0）中等号不恒成立．

上面的结论对于闭区间或无限区间也是成立的．

例1　判定函数$f(x)=x-\sin x$的增减性．

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它的导数

$$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0, \tag{1}$$

当且仅当$x=2n\pi$（$n=\pm 1$，± 2，…）时，$f'(2n\pi)=0$．因此，在任何区间中（长度不为0）（1）式的等号不恒成立．由定理2可知，$f(x)=x-\sin x$在定义域$(-\infty,+\infty)$内为单调增函数．

例2　求函数$f(x)=x^3-3x^2+5$的单调增减区间．

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它的导数

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2),$$

当$x=0$及$x=2$时，$f'(0)=f'(2)=0$．$x=0$及$x=2$两点把定义域分为三个区间：$(-\infty,0)$、$(0,2)$、$(2,+\infty)$．

容易判定在$(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$内，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在这两个区间内为单调增函数．

在$(0,2)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在这个区间内为单调减函数．

显然，在$x=0$及$x=2$是函数$f(x)=x^3-3x^2+5$的单调增区

间$(-\infty, 0)$，$(2, +\infty)$与单调减区间$(0, 2)$的分界点，在该点处的导数$f'(0)=0$，$f'(2)=0$．本例说明：有些函数在其定义域上不是单调函数时，可以用导数等于零的点将其定义域划分为有限个区间，这样，就可以使函数在各个部分区间上成为单调的．有时函数在某些点处导数不存在，在划分定义域时，还应该把这些点考虑进去．

例3 求函数$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$的单调增减区间．

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，它的导数为

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x\neq 0.$$

在其定义域$(-\infty, +\infty)$内没有使导数等于零的点，但是函数$f(x)$在$x=0$点不可导，因此函数不可导的点$x=0$把定义域$(-\infty, +\infty)$划分为两个区间$(-\infty, 0)$与$(0, +\infty)$．在$(-\infty, 0)$内，$f'(x)<0$，故$(-\infty, 0)$是$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$的单调减区间；在$(0, +\infty)$内，$f'(x)>0$，故$(0, +\infty)$是$f(x)=\sqrt[3]{x^3}$的单调增区间．

例4 证明：当$x>0$时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$．

证明 设$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，那么函数$f(x)$在区间$(0, +\infty)$上可导，它的导数为

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \\ &=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

当$x>0$时，$f(x)$为连续函数，且其导数$f'(x)>0$，因此在$[0,+\infty)$上$f(x)$为单调增函数．又$f(0)=0$，从而有$f(x)>f(0)=0$，即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0,$$

亦即

$$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}, \quad (x>0).$$ 证毕

二 函数的极值及其求法

在本节的例 2 中，$x=0$ 及$x=2$是函数 $f(x)=x^3-3x^2+5$ 的单调增、减区间的分界点，在$x=0$点的邻域内，当x从$x=0$点的左侧变到右侧时，函数$f(x)$由单调增加变为单调减少．因此，对$x=0$的邻域内的任何点x($x=0$点除外)，皆有$f(x)<f(0)$．同理，存在$x=2$点的某个邻域，当x从$x=2$点的左侧变到右侧时，函数$f(x)$由单调减少变为单调增加，因此对该邻域内的任何点x($x=2$点除外)，皆有$f(x)>f(2)$．具有这种特性的点（如$x=0$，$x=2$）在理论上和实际应用上都具有重要的意义．

1 **定义** 设函数$f(x)$在x_0点的某邻域内有定义，如果对该邻域内的任何点$x(x\neq x_0)$，皆有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$），则$f(x_0)$称为函数$f(x)$的极大值（或极小值），而x_0点称为函数$f(x)$的极大点（或极小点）．

极大值与极小值统称为极值．极大点与极小点统称为极值点．

例如本节的例 2 中，$f(x)=x^3-3x^2+5$，$f(0)=5$ 是$f(x)$的极大值，$x=0$是极大点；$f(2)=1$是$f(x)$的极小值，$x=2$是极小点．

由极值的定义可知，函数的极值是局部性的概念．例如，$f(x_0)$

是$f(x)$的一个极大值，只是把$f(x_0)$与x_0点附近的函数值$f(x)$加以比较而言．就函数的整个定义区间来说，$f(x_0)$就不一定是最大值．极小值也有类似的情况．甚至会出现函数在某点的极小值大于另一点处的极大值的情形（图4-7）．可见函数的极大（小）值与函数在一个区间上的最大（小）值是两个不同的概念．

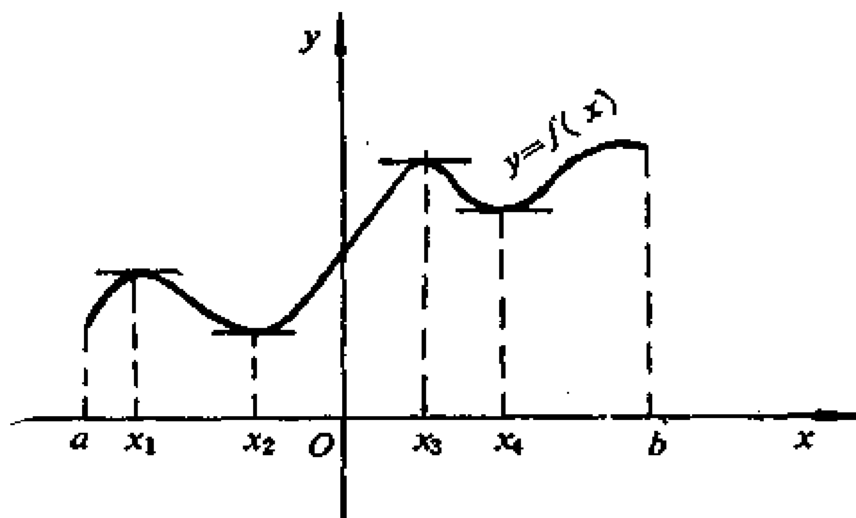


图 4-7

2 极值的必要条件 从图4-7会发现，在函数取得极值的点处，曲线的切线是水平的，即在该点处的导数等于零．

定理3（极值的必要条件） 设函数$f(x)$在x_0点处可导，并且$f(x_0)$是函数$f(x)$的极值，则必有$f'(x_0)=0$。

证明 不妨设$f(x_0)$是$f(x)$的极大值．据极大值的定义，在x_0点的某邻域内，对任何点x(x_0点除外)，皆有$f(x)<f(x_0)$，于是有$f(x)-f(x_0)<0$．那末，

当$x<x_0$时，$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\,;$$

当$x>x_0$时，$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0\,.$$

取极限，得

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0;$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

从而有 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0$. 证毕

这种使得导数$f'(x)=0$的点称为函数的驻点. 定理3说明：可导函数的极值点一定是函数的驻点. 但是驻点却不一定都是极值点. 例如函数$y=x^3$，$y'=3x^2$，显然$x=0$是函数的驻点，可是$x=0$并不是函数的极值点. 这就给我们提供了找函数极值点的一种方法，即先求函数$f(x)$的导数$f'(x)$. 再令$f'(x)=0$，求出方程的实根，找到驻点. 最后还需要判定驻点是不是极值点. 如果是极值点的话，还需要确定极值点处的函数值是极大值还是极小值.

此外，还必须注意到，对于连续函数来说，导数不存在的点也可能是函数的极值点. 例如，连续函数$f(x)=|x|$，在$x=0$点处不可导，但$f(0)=0$是它的极小值.

综上所述，函数的驻点及导数不存在的点都可能是函数的极值点. 这样的点是极值存在的“嫌疑点”. 连续函数仅在这样的点上，有可能取得极值.

现在的问题，是如何去判断函数极值嫌疑点是不是极值点？也就是极值存在的充分条件.

3 极值存在的充分条件

定理4（极值存在的第一充分条件） 设函数$f(x)$在x_0的某个闭邻域$|x-x_0|\leqslant\delta$（$\delta>0$）上连续，在去心邻域$0<|x-x_0|<\delta$中可导.

（1） 如果在$(x_0-\delta, x_0)$内，$f'(x)>0$；而在$(x_0, x_0+\delta)$内，$f'(x)<0$，则$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值；

（2） 如果在$(x_0-\delta, x_0)$内，$f'(x)<0$；而在$(x_0, x_0+\delta)$

内，$f'(x)>0$，则$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值；

（3） 如果在$(x_0-\delta, x_0)$及$(x_0, x_0+\delta)$中，$f'(x)$恒为正或恒为负，则$f(x_0)$不是函数$f(x)$的极值.

证明 只证明情形（1）. 因在$(x_0-\delta, x_0)$内，$f'(x)>0$，据本节定理2可知，$f(x)$在$[x_0-\delta, x_0]$上是单调增函数，故对任意的$x\in[x_0-\delta, x_0)$，都有$f(x)<f(x_0)$；同理可知$f(x)$在$(x_0, x_0+\delta)$上是单调减函数，故对任意的$x\in(x_0, x_0+\delta)$，都有$f(x)<f(x_0)$. 这就表明$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值.

类似地可以证明情况（2）及（3）. 证毕

根据定理3和4，概括上面的讨论可知，寻求连续函数$f(x)$的极值应按以下步骤进行：

（1） 求导数$f'(x)$；

（2） 求出所有极值嫌疑点处的x值，即求出使$f'(x)=0$的x值及使$f'(x)$不存在的x值；

（3） 依次对每个极值嫌疑点x_0用定理4的条件进行判断，确定极值点并判定极值点处的函数值是极大值还是极小值；

（4） 求出极值点处的函数值，就得到函数$f(x)$的全部极值.

例5 求函数$f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$的极值.

解 函数$f(x)$在其定义域$(-\infty, +\infty)$内可导.

（1） $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$；

（2） 令$6(x+1)(x-2)=0$，求得驻点$x_1=-1$，$x_2=2$；

（3） 由$f'(x)=6(x+1)(x-2)$来确定在x_1、x_2左、右两侧邻域内$f'(x)$的符号：

当x在$x_1=-1$的左侧邻域内时，$x+1<0$，$x-3<0$，故$f'(x)>0$；

当x在$x_1=-1$的右侧邻域内时，$x+1>0$，$x-3<0$，故$f'(x)<0$.

根据定理4可以判定$x_1=-1$是函数$f(x)$的极大点. 类似可以判

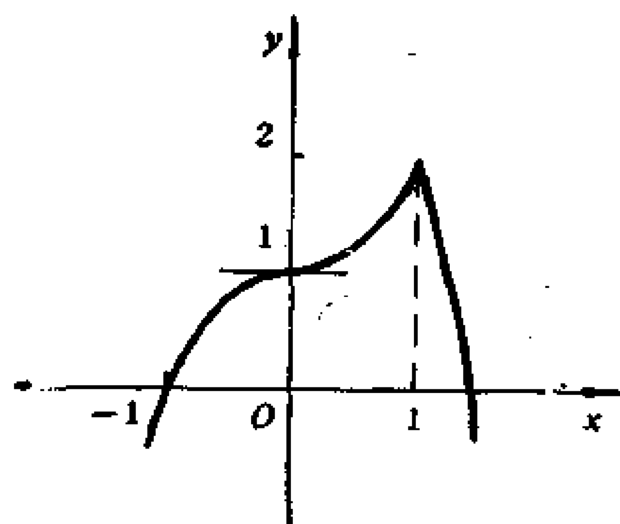


图 4-8

定理5（极值存在的第二充分条件） 设函数$f(x)$在x_0点的某个邻域内连续，在x_0点处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1） 当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$是函数$f(x)$的极大值；

（2） 当$f''(x_0)>0$时，$f(x_0)$是函数$f(x)$的极小值.

证明 只证情形（1）. 因$f''(x_0)<0$，由二阶导数定义，有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

根据函数值与极限值同号性定理，必存在x_0点的某个邻域$U(x_0)$，使得

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0,\quad x\in U(x_0),\quad x\neq x_0.$$

从而可推知，当$x<x_0$时，$x-x_0<0$，必有$f'(x)>0$；当$x>x_0$时，$x-x_0>0$，必有$f'(x)<0$. 那么由定理4的（1）知道，函数$f(x)$在x_0点取得极大值.

类似地可以证明情形（2）. 证毕

极值存在的第二充分条件说明，只要函数$f(x)$在其驻点x_0处

二阶导数存在且$f''(x_0)\neq 0$，就可以断定该驻点一定是极值点．但当$f''(x_0)=0$时，$f(x_0)$可能是函数$f(x)$的极值，也可能不是函数的极值．例如，$f(x)=x^4$，$f'(0)=0$、$f''(0)=0$，易知$f(0)=0$是函数$f(x)$的极小值．又如，$g(x)=x^3$，$g'(0)=0$，$g''(0)=0$，但$g(0)=0$就不是函数$g(x)$的极值．因此当函数$f(x)$在其驻点处二阶导数等于零时，就用第一充分条件进行判断．

例7 求函数$f(x)=x^3-3x$的极值．

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$．求导数

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1).$$

令 $3(x+1)(x-1)=0$，

求得驻点$x_1=-1$，$x_2=1$．

再求二阶导数

$$f''(x)=6x.$$

因$f''(-1)=-6<0$，故$x_1=-1$是极大点，$f(-1)=2$是极大值；因$f''(1)=6>0$，故$x_2=1$是极小点，$f(1)=-2$是极小值．

例8 求函数$f(x)=\sin x+\cos x$的极值．

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，求导数

$$f'(x)=\cos x-\sin x,\quad f''(x)=-\sin x-\cos x.$$

注意到$x=\pm n\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$不是驻点，当然不可能是极值点．又因$f(x)$是以$2\pi$为周期的函数，所以只需考虑开区间$(0,2\pi)$内函数的极值点就可以了．

令 $f'(x)=\cos x-\sin x=0$，$0<x<2\pi$

求得两个驻点$x_1=\dfrac{\pi}{4}$及$x_2=\dfrac{5\pi}{4}$．

因为$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}<0$，故$x_1=\dfrac{\pi}{4}$是极大点，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$是极大值；

因为$f''(\frac{5\pi}{4})=-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}=\sqrt{2}>0$，故$x_2=\frac{5\pi}{4}$是极小点，$f(\frac{5\pi}{4})=-\sqrt{2}$是极小值.

又因为函数$f(x)=\sin x+\cos x$以2π为周期，所以$\{\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\}$（$n=0，1，2，\cdots$）都是极大点，$\{\frac{5\pi}{4}\pm 2n\pi\}$（$n=0，1，2，\cdots$）都是极小点。

§4　函数的最大值、最小值

由闭区间上连续函数的性质可知，如果函数在闭区间$[a，b]$上连续，那么在该区间上函数一定可以取得最大值和最小值. 这只是一个存在性定理，并没有提供求最大值、最小值的方法.

现在假设函数$f(x)$在$[a，b]$上连续，可导，或在$(a，b)$内至多有有限个导数不存在的点和至多有有限个驻点. 在上述前提条件下，下面介绍求函数最大值、最小值的方法.

如果函数的最大值（或最小值）在区间内部的某点处取得，据极值的定义可知，这个最大值（或最小值）一定也是函数的极大值（或极小值）. 由假设可知，这个极值点一定是驻点，或者是导数不存在的点. 也应该考虑到函数的最大（小）值也可能在区间的端点处取得. 因此，求函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上的最大（小）值，只需求出$f(x)$在区间$(a，b)$内的驻点和导数不存在的点$x_1，x_2，\cdots，x_n$，然后比较函数值

$$f(a)，f(x_1)，f(x_2)，\cdots，f(x_n)，f(b)$$

的大小，其中最大（小）者，就是函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值.

例1　求函数$f(x)=x^4-2x^2+6$在区间$[-2，2]$上的最大

值和最小值.

解 求导数$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$.

令 $4x(x^2-1)=0$，求得驻点$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$，计算出下列函数值：

$f(-2)=f(2)=14$，$f(0)=6$，$f(-1)=f(1)=5$.

比较这些函数值的大小，可知$f(x)$在$[-2, 2]$上的最大值为$f(-2)=f(2)=14$，最小值$f(-1)=f(1)=5$.

例2 设$0\leqslant x\leqslant 1$，$\alpha>1$，试证明不等式

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}}\leqslant x^\alpha+(1-x)^\alpha\leqslant 1$$

成立.

证明 引进函数$f(x)=x^\alpha+(1-x)^\alpha$，$x\in[0, 1]$.

求导数 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha(1-x)^{\alpha-1}$.

令 $\alpha x^{\alpha-1}-\alpha(1-x)^{\alpha-1}=0$，求得驻点$x=\dfrac{1}{2}$. 并算出下列函数值：

$$f(0)=1,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{\alpha-1}},\ f(1)=1.$$

比较这些函数值的大小，可知$f(x)$在$[0, 1]$上的最大值为$f(0)=f(1)=1$. 最小值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. 所以

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}}\leqslant x^\alpha+(1-x)^\alpha\leqslant 1.$$

特别要指出的是，如果连续函数在一个区间（有限或无限，开或闭）内有唯一的极值点x_0(即函数曲线只有一峰或一谷)，那末当$f(x_0)$是极大（小）值时，$f(x_0)$也是$f(x)$在该区间的最大（小）

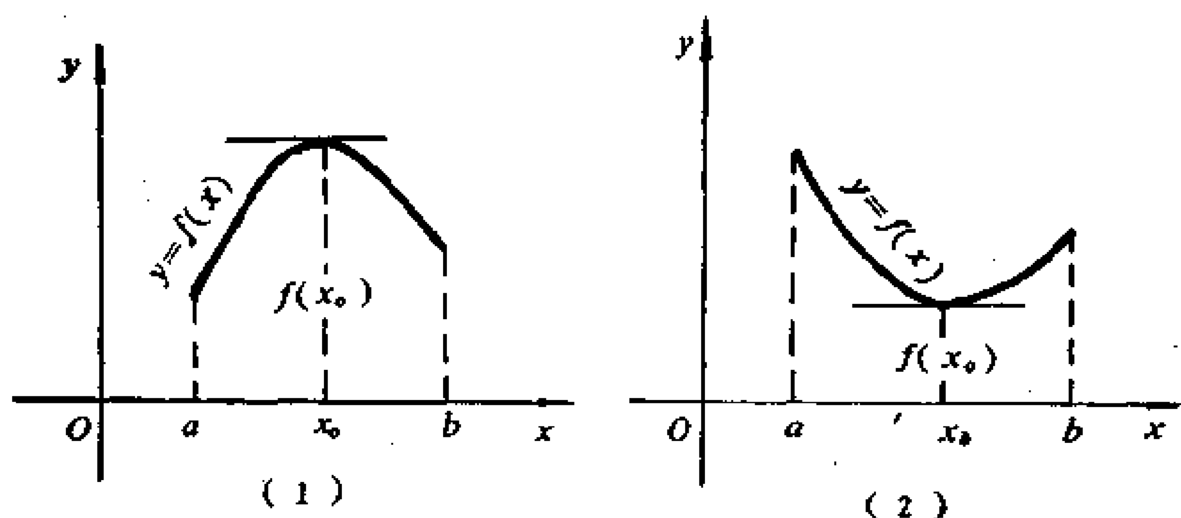


图 4-9

值（图4-9）．遇到这种情况就不必把$f(x_0)$与端点处的函数值比较了．

例3 如图4-10所示（其中a为正常数），要制作一个断面为梯形的无盖水槽，问倾斜角θ多大时，水槽的流量最大？



图 4-10

解 水槽的流量在流速一定时，与水槽的横截面面积成正比，横截面面积愈大，流量愈大．求水槽的流量最大，亦即求水槽截面面积最大．

设水槽横截面面积为S，因横截面是梯形，根据其边角关系，容易计算出面积为

$$S=\frac{1}{2}[a+a(1+2\cos\theta)]\cdot a\sin\theta$$

$$=a^2\sin\theta(1+\cos\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

求导数

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}=a^2[\cos\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta]$$

$$=a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1).$$

令
$$a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)=0,$$

求得
$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \cos\theta=-1.$$

注意到 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，只取$\cos\theta=\frac{1}{2}$，求出驻点$\theta=\frac{\pi}{3}$，而$\cos\theta=-1$应舍去.

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\theta^2}=-a^2\sin\theta(4\cos\theta+1),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2<0.$$

函数$S=a^2\sin\theta(1+\cos\theta)$，$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$有唯一的极值点$\theta=\frac{\pi}{3}$，且为极大点. $S\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$必为最大值. 所以当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，水槽的流量最大.

例 4 要建造一个容积为V（正常数）的圆柱形密闭容器，问应怎样选择圆柱形容器的半径R和高h，才能使所用的原材料最省？

解 据题设，要使建造圆柱形容器所用的原材料最省，就是指圆柱形的表面积最小.

设圆柱形的表面积为S，由于容器是密闭的，故

$$S=2\pi Rh+2\pi R^2,$$

再由V，R，h的关系式：$V=\pi R^2 h$，可推得

$$h=\frac{V}{\pi R^2}.$$

代入表面积S的表达式中，得

$$S=\frac{2V}{R}+2\pi R^2,\ (0<R<+\infty).$$

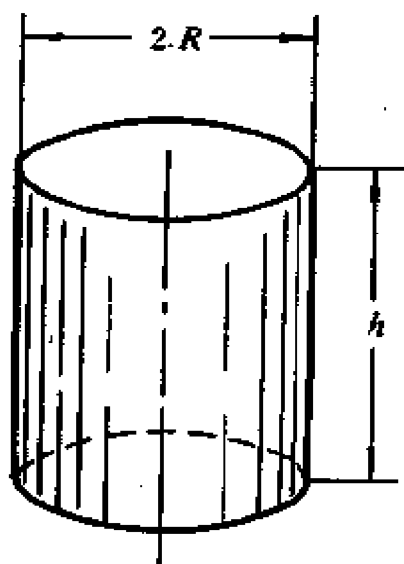


图 4-11

求导数
$$\frac{dS}{dR}=-\frac{2V}{R^2}+4\pi R.$$

令

$$-\frac{2V}{R^2}+4\pi R=0,$$

求得驻点
$$R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

再求二阶导数

$$\frac{d^2S}{dR^2}=\frac{4V}{R^3}+4\pi,$$

$$\left.\frac{d^2S}{dR^2}\right|_{R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=12\pi>0.$$

圆柱形容器的表面积$S=\frac{2V}{R}+2\pi R^2$在$(0,+\infty)$内有唯一的极值，且为极小值，故当$R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$时，使用的原材料最省.

例5 设有一个由电源的电动势为E，内电阻为r及外电阻为R

的闭合电路（图4-12），问外电阻R多大时，才能使输出功率最大？

解 由电学知识可知，电源的输出功率为：

$$P=P(R)=I^2R.$$

其中，I是回路中的电流．故

$$I=\frac{E}{r+R}.$$

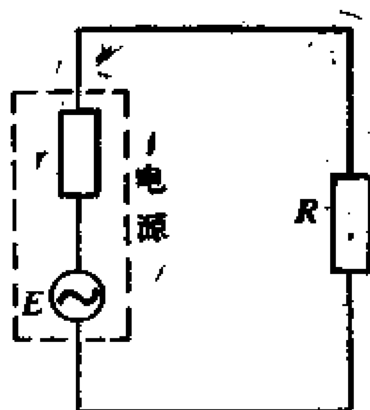


图 4-12

把I代入功率P的表达式，得

$$P(R)=\frac{E^2R}{(r+R)^2},\ (R>0).$$

求导数

$$P'(R)=\frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}.$$

令$P'(R)=0$，解得驻点$R=r$.

当$R<r$时，$P'(R)>0$；当$R>r$时，$P'(R)<0$，所以$R=r$是$P(R)$的极大点．$P(r)=\frac{E^2}{4r}$是极大值．因为函数$P(R)$在区间$(0,+\infty)$内有唯一的极值，且为极大值，所以这个极大值必为$P(R)$在$(0,+\infty)$内的最大值．于是当$R=r$时，输出功率P最大．

§5 曲线的凹凸性与拐点

知道了函数的增减性与极值，只是掌握了函数变化的大致情况．例如，在图4-13中，动点从A点运动到B点，粗略地说可以沿着三条上升的曲线．仔细地分析，ACB是凸的上升曲线，ADB是凹的上升曲线；AEB是平直上升的直线．这些都是上升的曲线，是它们的共性．但又有差异，即它们的“凹凸性”不同．

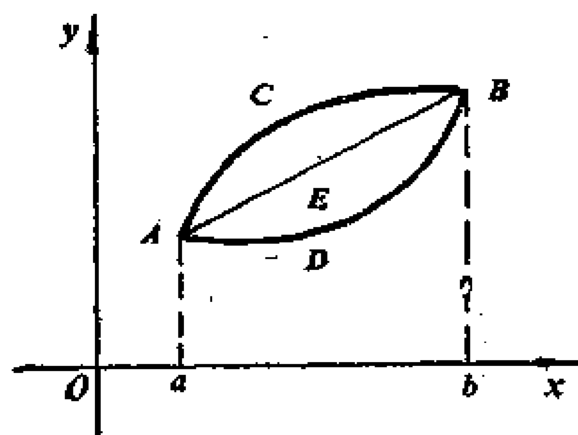


图 4-13

从几何直观上分析，在图4-14(1)所表示的曲线弧段上任取两点$A(x_1, f(x_1))$，$B(x_2, f(x_2))$，则联接这两点的弦AB位于曲线弧段$\overset{\frown}{AB}$的下方．而在图4-14(2)所表示的弧段上的情形正好相反．曲线弧的这种属性，称为曲线的凹凸性．下面给出曲线凹凸性的定义．

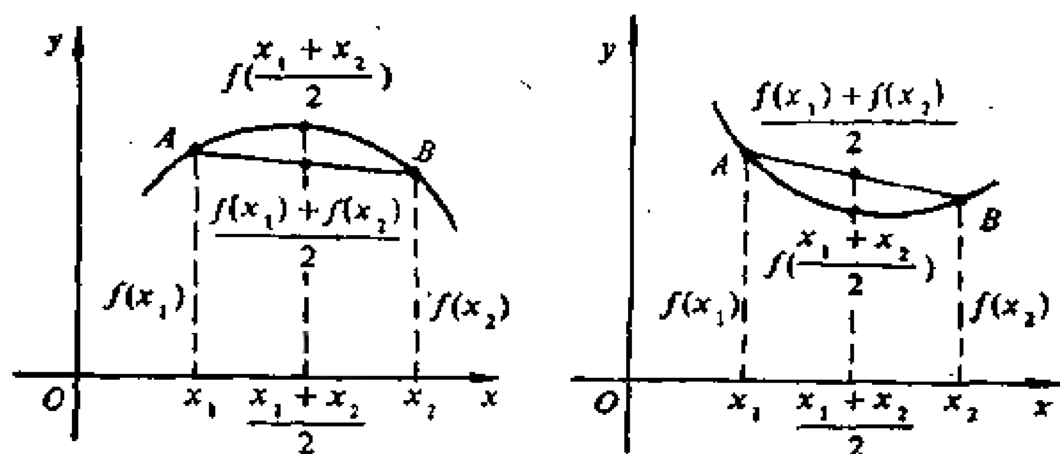


图 4-14

定义 设函数$f(x)$在区间(a, b)内连续，如果对(a, b)内任意两点x_1、x_2，恒有

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)>0,$$

由(3)式得到

$$f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)>0,$$

或

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(x_0),$$

即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

据曲线弧凹凸性的定义，可知函数曲线$y=f(x)$在$[a, b]$上是凹弧.

类似地可以证明情形(2).　　　　　　　　　　　　证毕

从定理的证明过程可以看出，如果函数$f(x)$在(a, b)内$f''(x)\geqslant 0$，但在(a, b)的任何子区间中不恒为零，则$f'(x)$在(a, b)内是单调增的. 由导数的几何意义可知，连续曲线$y=f(x)$的切线的斜率随着x的增大而增大，反之亦然. 因此，对于具有连续的一阶导数$f'(x)$的函数$y=f(x)$来说，如果函数曲线$y=f(x)$的斜率$f'(x)$是单调增的，则曲线弧$y=f(x)$必为凹弧. 同理，如果函数曲线$y=f(x)$的斜率$f'(x)$是单调减的，则曲线弧$y=f(x)$必为凸弧.

例1　判断曲线$y=x^4$的凹凸性.

解　因为

$$y'=4x^3,\quad y''=12x^2$$

所以函数$y=x^4$在其定义域$(-\infty, +\infty)$内，恒有$y''\geqslant 0$，但只在一点$x=0$点处$y''(0)=0$. 据定理1可知，函数曲线$y=x^4$在其定义域$(-\infty, +\infty)$内是凹弧.

例2　判断曲线$y=x^3$的凹凸性.

解　因为

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x,$$

当$x<0$时，$y''<0$，故函数曲线$y=x^3$在$(-\infty, 0)$内为凸弧；当$x>0$时，$y''>0$，故函数曲线$y=x^3$在$(0, +\infty)$内为凹弧.

上例中原点$O(0, 0)$是曲线弧$y=x^3$由凸弧变为凹弧的分界点，通常称为曲线的拐点.

定义 连续曲线$y=f(x)$上，凹弧与凸弧的分界点，称为这曲线的拐点.

由定理1已经知道，由$f''(x)\geqslant 0$或$f''(x)\leqslant 0$，但在任何子区间中不恒为零，就能判定函数曲线$y=f(x)$是凹弧或凸弧. 而拐点又是曲线上凹弧与凸弧的分界点，所以如果$f''(x)$在x_0点的左右两侧变号，则点$(x_0, f(x_0))$一定是拐点. 由此可见函数曲线$y=f(x)$的拐点的横坐标x_0，只可能是使$f''(x)=0$的点或者是$f''(x)$不存在的点. 于是可以按下列步骤求曲线$y=f(x)$的拐点：

（1） 求$f'(x)$及$f''(x)$；

（2） 令$f''(x)=0$，求出该方程在(a, b)内的实根及使二阶导数不存在的点；

（3） 对于（2）求出的每一点x_0，检查$f''(x)$在x_0左右两侧邻近的符号，如果$f''(x)$在x_0左、右两侧邻近的符号相反时，则点$(x_0, f(x_0))$是拐点. 当两侧的符号相同时，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

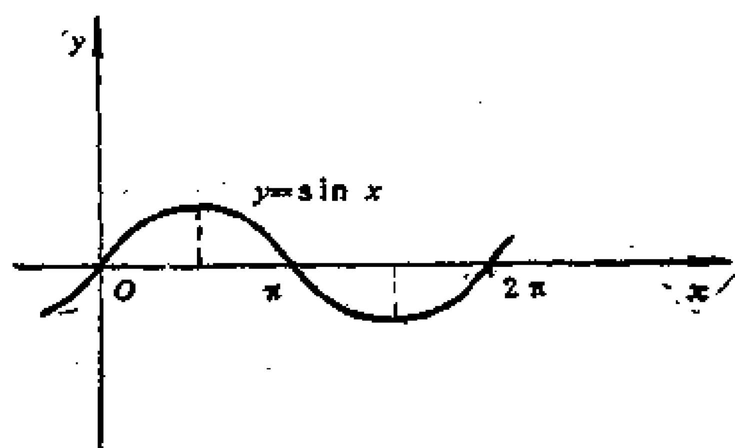


图 4-15

例3 研究曲线$y=\sin x$的凹凸性和拐点.

解 因为$y=\sin x$是以2π为周期的函数，所以可先研究在区间$[0, 2\pi]$上曲线的凹凸性.

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad 0<x<2\pi.$$

令$y''=0$，解得$x=\pi$. 在区间$(0, \pi)$内$y''<0$，故$(0, \pi)$为函数曲线$y=\sin x$的凸区间；在区间$(\pi, 2\pi)$内$y''>0$，故$(\pi, 2\pi)$为函数曲线$y=\sin x$的凹区间. 所以，点$(\pi, 0)$是函数曲线$y=\sin x$在区间$(0, 2\pi)$内的一个拐点. 又因$y=\sin x$在其定义域内是周期函数，在区间$[2\pi, 3\pi]$中的图形与在$[0, \pi]$中的图形一样，因此，点$(2\pi, 0)$也是曲线$y=\sin x$的拐点；同理点$(0, 0)$也是曲线的拐点. 于是，所有这些点$(\pm k\pi, 0)$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$都是曲线$y=\sin x$的拐点.

例4 研究曲线$y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$的凹凸性和拐点.

解 函数$y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，求导数

$$y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}},\qquad y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}.$$

当$x=4$时，函数的二阶导数不存在. 当$x<4$时$y''>0$，故$(-\infty, 4)$是曲线$y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$的凹区间；当$x>4$时，$y''<0$，故$(4, +\infty)$是曲线$y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$的凸区间. 点$(4, 2)$是曲线唯一的拐点（图4-16）.

此外，由于曲线$y=f(x)$的拐点的横坐标是二阶导数由正变负或由负变正的区间分界点，这恰好是一阶导函数$f'(x)$取得极值的点. 因此，求曲线$y=f(x)$的拐点的横坐标，就相当于求$f'(x)$的极值点. 这样，就有下面的鉴定曲线$y=f(x)$拐点的另一准则：

设函数$y=f(x)$在x_0点的邻域内具有三阶导数，且$f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq 0$，则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

例5 求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点.

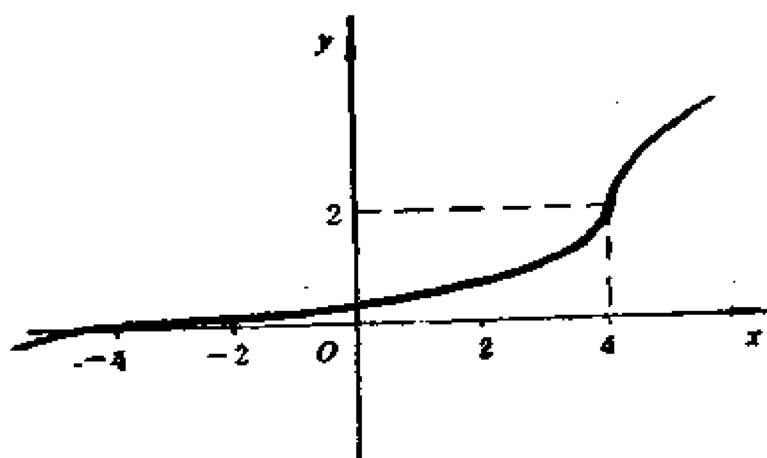


图 4-16

解 函数$y=3x^4-4x^3+1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$．求函数的导数：

$$y'=12(x^3-x^2),\quad y''=12(3x^2-2x),$$
$$y'''=24(3x-1).$$

令$y''=0$，解得$x_1=0$，$x_2=\frac{2}{3}$．由于

$$y'''\Big|_{x=0}=-24\neq 0,\quad y'''\Big|_{x=\frac{2}{3}}=24\neq 0.$$

所以点$(0,1)$及点$\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$都是曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点．

§6 在直角坐标系下函数图形的描绘

描绘函数的图形，以前主要用“逐点描迹”法．对于复杂的函数，用这种方法就很难迅速、准确地作出它的图形．为了能够比较迅速和准确地作出函数的图形，可以借助于函数的一阶导数，确定函数图形的升降区间和极值；借助于函数的二阶导数，确定函数图形的凹凸区间和拐点，使得在有限范围之内容易作出函数的图形．当$x\to\infty$或$y\to\infty$时，函数的图形伸向无穷远处，在某些情况下，

函数的图形可以借助于“渐近线”来说明.

一　曲线的渐近线

定义　当曲线C上的动点M沿着曲线无限远离坐标原点时，如果动点M与某直线L的距离趋向于零，则称直线L为曲线C的渐近线（见图4-17）.

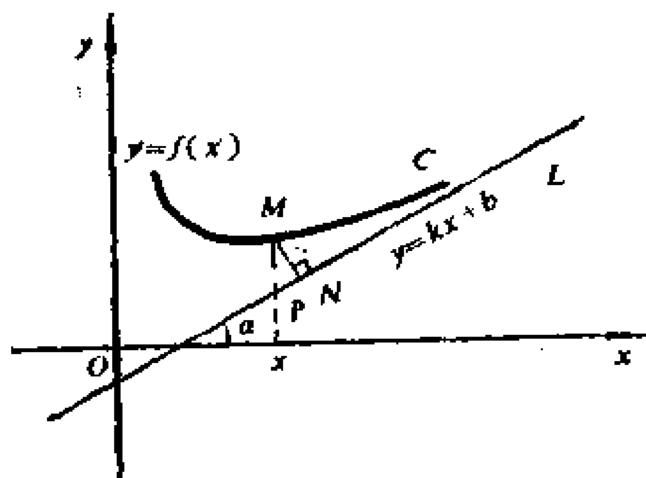


图 4-17

下面来讨论一般曲线$y=f(x)$在什么条件下有渐近线，如何求出渐近线的方程？

设曲线C：$y=f(x)$，直线L：$y=kx+b$，且L倾斜角$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$. 曲线C上的动点M到直线L的距离为$|MN|$，其中N为过点M向直线L作垂线的垂足（图4-17）.

如果直线L为曲线C的渐近线，那末据渐近线定义的要求，应有

$$\lim_{x\to\infty}|MN|=0\quad.\qquad(1)$$

设对于动点$M(x,f(x))$，渐近线上与点M同一横坐标的点为$P(x,kx+b)$，那么

$$|PM|=|f(x)-(kx+b)|.$$

因$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，故$\cos\alpha\neq0$，由直角三角形MNP中，可得

$$|PM|=\frac{|MN|}{|\cos\alpha|},$$

其中，$\cos\alpha$为非零常数．从而可知：$\lim\limits_{x\to+\infty}|MN|=0$ 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}|PM|=0$，即$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0$成立．这就表明：若存在常数$k$、$b$使上式成立，则曲线$y=f(x)$存在渐近线 $y=kx+b$．因此求渐近线也就归结为确定k和b，使得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0 \tag{2}$$

成立．

因为

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0,$$

从而应有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

于是

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{3}$$

求出k值之后，代入$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0$中，可以求出$b$，

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \tag{4}$$

这就说明，如果$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的斜渐近线（$k\neq 0$），则k，b满足(3)、(4)式：反之，由(3)、(4)两式确定的k、b必满足(2)式，因此，直线$y=kx+b$必为曲线$y=f(x)$的斜渐近线．如果$k=0$，渐近线方程$y=b$，称为水平渐近线．

根据图4-17，讨论了$x\to+\infty$时曲线的渐近线问题．对$x\to-\infty$时应作类似的讨论，有时也可能得到另一条渐近线．

此外，也应注意到，若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，或

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$)，则称$x=a$是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线.

例1 求曲线$y=f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$的渐近线.

解 因为

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{1+x}=-\infty,\ \lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{1+x}=+\infty.$$

所以$x=-1$是曲线的垂直渐近线.

又由极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

及

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{1+x}-x\right]=-1,$$

求得$k=1$，$b=-1$，所以$y=x-1$是曲线的斜渐近线.

二 函数图形的描绘

函数图形的描绘是单元函数微分学知识的综合应用. 将前面各章及本章所讨论的有关函数的某些性态总结起来，就得到描绘函数图形的一般步骤：

（1） 确定函数的定义域、间断点、奇偶性、周期性等；

（2） 求函数的一阶导数及二阶导数；

（3） 确定函数的增减区间和极值；

（4） 确定函数图形的凹凸区间和拐点；

（5） 求出函数图形的渐近线；

（6） 列出表格，最后描绘图形.

例2 描绘函数$y=x^3-3x^2+1$的图形.

解 （1） 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

（2） 函数的一阶及二阶导数为

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),\quad y'' = 6(x-1).$$

（3） 令$y'=0$，求得驻点$x_1=0$，$x_2=2$．

令$y''=0$，求得$x=1$．

把$y'=0$的根$x=0$和2，$y''=0$的根$x=1$，由小到大排列，依次把定义域$(-\infty, +\infty)$划分成下列四个部分区间：

$$(-\infty, 0],\ [0, 1],\ [1, 2],\ [2, +\infty).$$

（4） 在$(-\infty, 0)$内，$y'>0$，$y''<0$，故在$(-\infty, 0]$上函数的图形是上升的凸弧；

在$(0, 1)$内，$y'<0$，$y''<0$，故在$[0, 1]$上函数的图形是下降的凸弧；

在$(1, 2)$内，$y'<0$，$y''>0$，故在$[1, 2]$上函数的图形是下降的凹弧；

在$(2, +\infty)$内，$y'>0$，$y''>0$，故在$[2, +\infty)$上函数的图形是上升的凹弧．

极大值$f(0)=1$，极小值$f(2)=-3$，拐点$(1, -1)$．

（5） 函数图形无渐近线．

（6） 列表并描绘函数图形（图4-18）．

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大 1	↘	拐点 −1	↘	极小 −3	↗

例3 描绘函数$y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$的图形．

解 （1） 函数的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$．

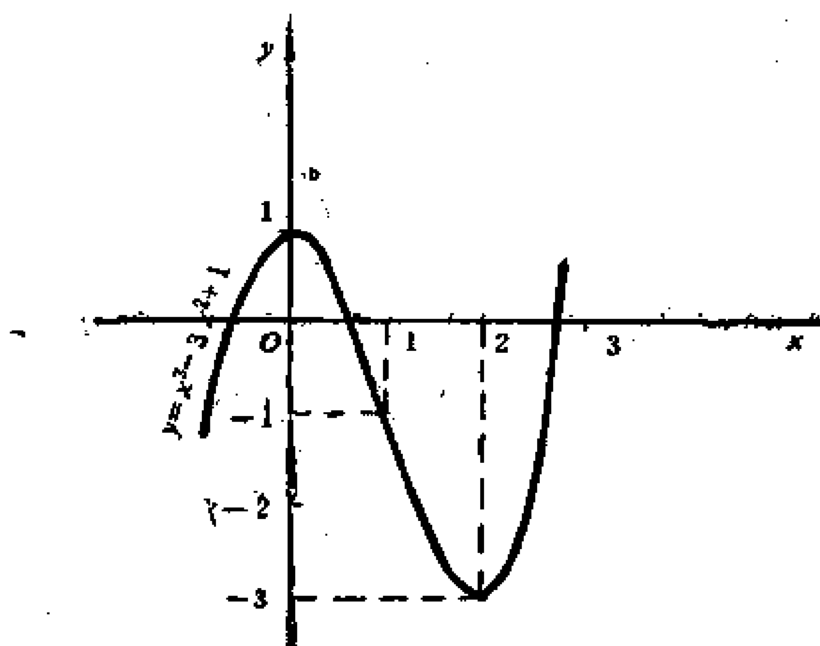


图 4-18

（2） 求函数的导数

$$y'=-\frac{(x^3+2)}{x^3},\ y''=\frac{6}{x^4}.$$

（3） 令$y'=0$，求得驻点$x=-\sqrt[3]{2}$. 把函数的定义域划分为三个部分区间：

$$(-\infty,\ -\sqrt[3]{2}),\ (-\sqrt[3]{2},\ 0),\ (0,\ +\infty).$$

（4） 在$(-\infty,\ -\sqrt[3]{2})$内$y'<0$，$y''>0$，故在$(-\infty,\ -\sqrt[3]{2})$函数的图形是下降的凹弧；

在$(-\sqrt[3]{2},\ 0)$内$y'>0$，$y''>0$，故在$(-\sqrt[3]{2},\ 0)$上函数的图形是上升的凹弧；

在$(0,\ +\infty)$内$y'<0$，$y''>0$，故在$(0,\ +\infty)$内函数的图形是下降的凹弧.

极小值$f(-\sqrt[3]{2})=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

（5） 求函数图形的渐近线

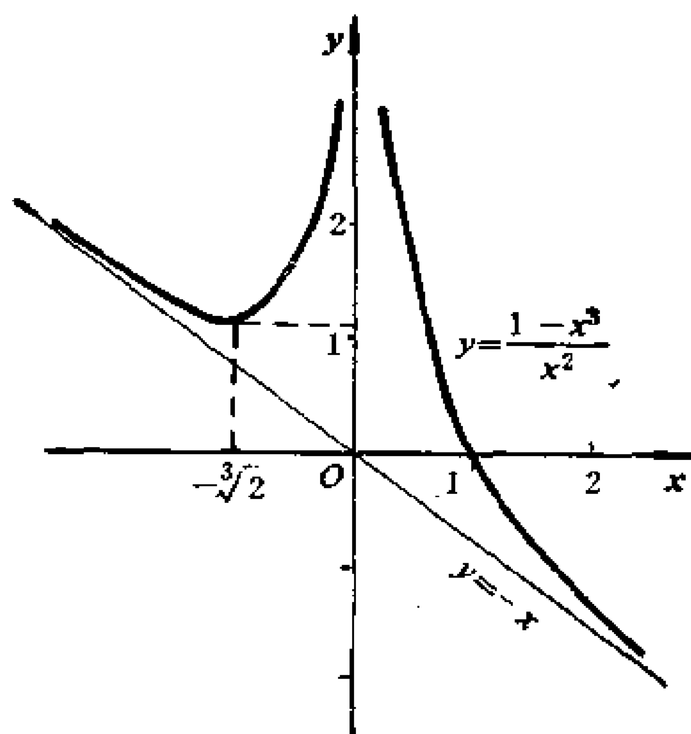


图 4-19

其中$\alpha\cdot(x-x_0)$当$x\to x_0$时是比$|x-x_0|$高阶的无穷小. 上式又可改写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha\cdot(x-x_0).$$

上式表明：当$|x-x_0|$很小时，可以用$x-x_0$的一次多项式$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$来近似表达函数$f(x)$，即

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

但这种近似表达式还存在不足之处：一是精确度不高，由这种近似表达所产生的误差仅仅是关于$(x-x_0)$的高阶无穷小；二是用它来作近似计算时，不能作误差估计. 如果在做近似计算要求精确度更高而又需要估计误差时，很自然地会想到用$(x-x_0)$的n($n>1$)次多项式来近似表达函数$f(x)$，同时希望能给出一个简便的误差估计公式.

假设函数$f(x)$在x_0点的某邻域内具有直至$n+1$阶导数，问题是要找到一个关于$(x-x_0)$的n($n>1$)次多项式$P_n(x)$近似表

达函数$f(x)$，即

$$f(x)\approx P_n(x),$$

要求当$x\to x_0$时，$f(x)-P_n(x)$是比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小，并且具体给出它的误差$|f(x)-P_n(x)|$的表达式.

先考虑一种特殊情形.设$f(x)$本身就是$(x-x_0)$的一个$n(n>1)$次多项式函数，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n.$$

现在讨论等式右边的系数$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$与$f(x)$有何关系. 为此，在等式两边求各阶导数，得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n.$$

在上面的各等式中，令$x=x_0$，便得

$$a_0=f(x_0),\ a_1=f'(x_0),\ a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

那么，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.\quad (1)$$

上式表明这样的事实：若$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-x_0)^i$，那么$f(x)$必可以唯一地表示为

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

其中，零阶导数$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

再考虑一般的情形. 设$f(x)$是一般函数（非多项式函数），它在x_0的某个邻域内具有直至$(n+1)$阶导数，仿照(1)式建立一个关于$(x-x_0)$的n次多项式$P_n(x)$:

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2)$$

因为$f(x)$是非多项式函数，故$f(x)\neq P_n(x)$. 但是由(2)式可知

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ P_n''(x_0)=f''(x_0),\ \cdots\cdots,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

因此，我们期望$P_n(x)$就是要找的函数$f(x)$的n次近似多项式. 下面证明这一事实.

定理1（台劳中值定理） 设函数$f(x)$在x_0的某个邻域内具有直至$(n+1)$阶导数，则当x在此邻域内时，函数$f(x)$可以表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (7.1)$$

这里，ξ是介于x_0与x之间的一个实数.

证明 为了方便起见，记

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x),\quad q(x)=(x-x_0)^{n+1}.$$

要证明 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，只需证明

$$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\text{（}\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间）}.$$

由$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$及定理的条件，易知

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

及$q(x)=(x-x_0)^{n+1}$，可知

$$q(x_0)=q'(x_0)=q''(x_0)=\cdots=q^{(n)}(x_0)=0.$$

两个函数$R_n(x)$与$q(x)$在以x_0及x为端点的区间上满足柯西中值定理条件，应用柯西中值定理得

$$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{q(x)-q(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{q'(\xi_1)}$$

（ξ_1介于x_0与x之间）.

对两个函数$R_n'(x)$与$q'(x)$在以x_0及ξ_1为端点的区间上再应用柯西中值定理，得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{q'(\xi_1)}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{q'(\xi_1)-q'(x_0)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{q''(\xi_2)}$$

（ξ_2介于x_0与ξ_1之间）.

这样连续 $n+1$ 次应用柯西中值定理，就得到

$$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{q^{(n+1)}(\xi)},$$

其中，或者$x<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\xi<x_0$，

或者$x>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>\xi>x_0$.

注意到$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$，$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-P_n^{(n+1)}(x)$，因$P_n^{(n+1)}(x)=0$，故$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$；$q(x)=(x-x_0)^{n+1}$，$q^{(n+1)}(x)=(n+1)!$，故$q^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$，于是

$$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{q^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

这就证明了

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}q(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

定理中关于$(x-x_0)$的n次多项式$P_n(x)$称为函数$f(x)$在x_0点展开的n阶台劳多项式. $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$称为k阶台劳系数. $R_n(x)$称为n阶余项. 而等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

称为函数$f(x)$在x_0点展开的n阶台劳展开式，或台劳公式. 如果把$R_n(x)$表示为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

(ξ在x_0与x之间),

就称为拉格朗日形式的余项，有时也写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中$\Delta x=x-x_0$，$0<\theta<1$.

显然，当$n=0$时，台劳公式就写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\quad(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}),$$

这就是拉格朗日中值公式.

由台劳中值定理的条件，函数$f(x)$在x_0的某个邻域内具有直至$n+1$阶导数及$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$可知$R_n(x)$也具有直至$n+1$阶导数，且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

而$R_n^{(n)}(x)$在x_0点处连续，由罗比塔法则，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0.$$

由此推知，当$x\to x_0$时，$R_n(x)$是关于$(x-x_0)^n$的高阶无穷小.

如果对于某个固定的n，当x在x_0的某个邻域内变动时，$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M(M>0)$，则有估计式：

$$|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

在台劳公式中，若取$x_0=0$，则余项中的ξ介于0与x之间，那么台劳公式就变成

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}，其中\xi在0与x之间. \qquad (7.2)$$

公式(7.2)称为函数$f(x)$的马克劳林（Maclaurin）展开式.

例1 求$f(x)=e^x$的n阶马克劳林展开式.

解 因为$f(x)=e^x$的各阶导数为

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,$$

$$f^{n+1}(\xi)=e^{\xi},\quad \xi=\theta x,\quad 0<\theta<1.$$

把这些值代入(7.2)式，得

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad (0<\theta<1).$$

如果用等右边的 n 次多项式来近似表达e^{x}，即

$$e^{x}\approx 1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!},$$

而所产生的误差为

$$|R_{n}(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n}\right|\leqslant\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\qquad (0<\theta<1).$$

特别是当 $x=1$ 时，得

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

这时，误差为

$$|R_{n}|\leqslant\frac{e}{(n+1)!}\leqslant\frac{3}{(n+1)!}.$$

若取 $n=7$，即取展开式的前八项来计算e的近似值，即

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{7!}\approx 2.7183,$$

而产生的误差为

$$|R_{7}|\leqslant\frac{3}{(7+1)!}=\frac{3}{8!}<10^{-4}.$$

例2 求函数$f(x)=\sin x$的 n 阶马克劳林展开式。

解 因为$f(x)=\sin x$的各阶导数为

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),\ \cdots,$$

$$f^{n}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

所以

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,$$
$$f^{2m-1}(0)=(-1)^{m-1},\ f^{2m}(0)=0,\ \cdots$$

那么$f(x)=\sin x$的$n=2$m阶马克劳林展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x). \tag{3}$$

其中余项$R_{2m}(x)$为

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[\theta x+\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},$$

$$(0<\theta<1).$$

如果用近似表达式

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{3!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

则有误差估计式

$$|R_{2m}(x)|=\left|(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

若取$m=2$，即取展开式的前两项作为$\sin x$的近似公式：

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}.$$

这时，误差为

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{|x|^5}{5!}.$$

例 3 利用$\sin x$的马克劳林展开式计算$\sin 10^\circ$的近似值，要求准确至10^{-4}.

解 由于

$$10^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} < 0.2,$$

那么

$$|R_{2m}| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} < \frac{(0.2)^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

欲使 $|R_{2m}| < 10^{-4}$，只须

$$\frac{(0.2)^{2m+1}}{(2m+1)!} < 10^{-4},$$

从而可知，只须取$m=2$就行了．于是

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0.174533 - 0.000886 = 0.173647.$$

§8 曲 率

一 弧微分

到目前为止，我们只会求直线和圆弧的长度，一般曲线的长度，即弧长的概念和计算，将在积分学中讨论．本节先介绍弧微分的概念，作为推导曲率公式的预备知识．

定义 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且具有连续的一阶导数$f'(x)$，则称曲线$y=f(x)$为一光滑曲线．

$$=\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right].$$

开平方，得

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}.$$

当$\Delta x\to 0$时，$M'\to M$，故有

$$\lim_{M'\to M}\frac{|\widehat{MM'}|}{|MM'|}=1\text{ 及}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',$$

从而有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{1+y'^2}.$$

又因为$s=s(x)$是单调增函数，必有$\dfrac{ds}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta x}>0$，所以根号前应取正号，于是得到

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2},$$

或

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{8.1}$$

这就是要求的弧微分的公式.

有时把(8.1)式写成对称的形式

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2. \tag{8.2}$$

如果曲线是以参量方程：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$给出，则有

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \tag{8.3}$$

从(8.2)式可以看出，弧微分ds的几何意义表示切线段MT的长度．若记切线MT的倾斜角为α，那末在以dx、dy和ds为边长的直角三角形MNT中（图4-20)），有

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha.$$

二　曲率

在工程实际中，常常要考虑曲线的弯曲程度. 例如，在设计铁路或公路的弯道时，就必须考虑弯道部分的弯曲程度. 如果弯曲太厉害，火车或汽车在高速行驶中转弯时，产生很大的离心力，就可能造成翻车事故. 又如在机械工程或土木工程中的各种轴或梁，由于荷载的作用会产生弯曲变形，设计时就必须考虑把这种弯曲程度控制在允许的限度内. 这就要求能定量地研究曲线的弯曲程度，而曲率就是描述弯曲程度的一个量.

1　曲率概念

曲线的弯曲程度的含义是什么？在数学上怎样来表示曲线的弯曲程度呢？

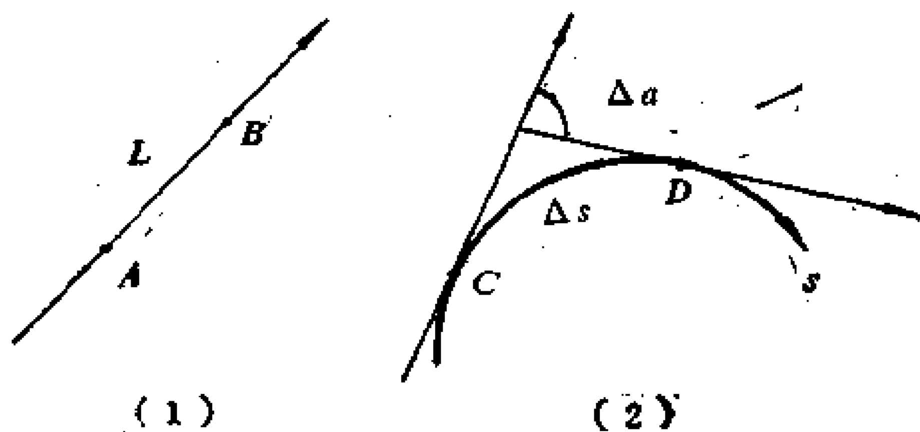


图 4-21

图4-21中，在直线上各点处作切线即是它本身，沿直线L从点A到点B，切线的方向没有变化. 但沿着曲线s从点C到点D，切线的倾斜角随着切点的移动而改变. 在曲线s上，由于沿着曲线从点C拐过一段弧长为Δs的弯路到点D，切线转了一个角度$\Delta\alpha$. 因此曲线的弯曲程度就应由$\Delta\alpha$与Δs这两个量来确定.

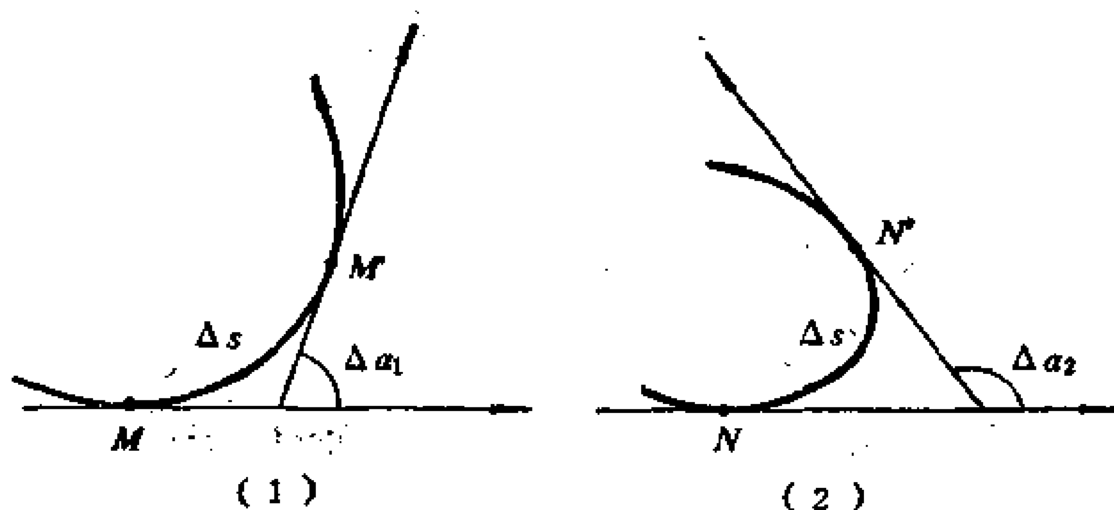


图 4-22

由图4-22可以看出，当两个弧段$\widehat{MM'}$与$\widehat{NN'}$的弧长相等，都等于Δs时，切线转角大者弯曲得厉害，两者成正比。

但是切线转角的大小还不足以充分反映曲线的弯曲程度．如图4-23，两个弧段$\widehat{MM'}$与$\widehat{NN'}$切线的转角都是$\Delta\alpha$，但是弧长小者$\widehat{MM'}$比弧长大者$\widehat{NN'}$弯曲得厉害，两者成反比．

综上所述，我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念．

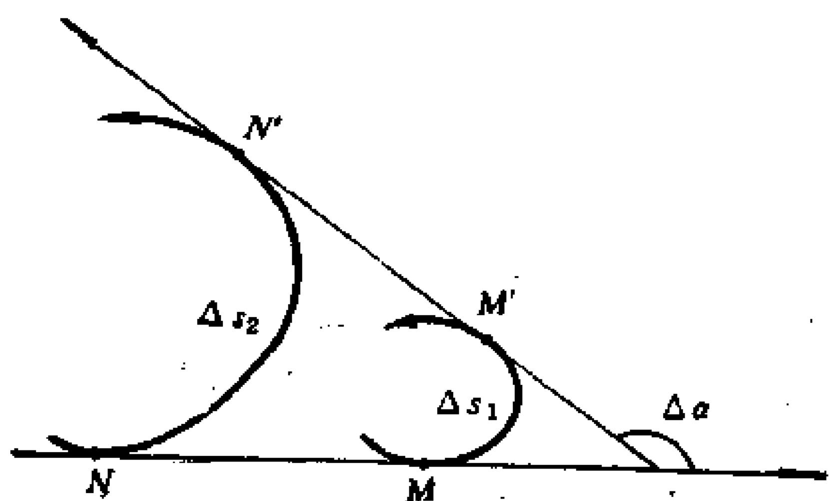


图 4-23

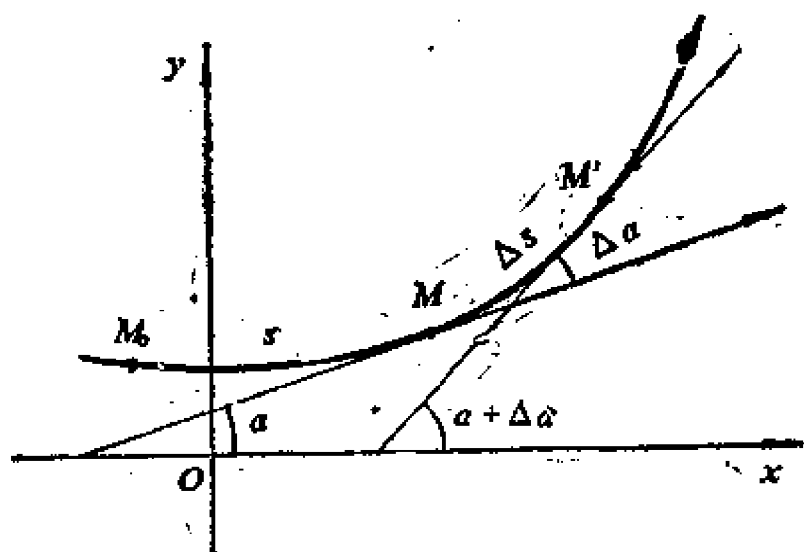


图 4-24

设曲线是光滑曲线，在曲线上选定一点M_0作为度量弧长的基点，假设曲线上一点M对应于弧长s，切线的倾斜角为α，曲线上邻近一点M'对应的弧长为$s+\Delta s$，切线的倾斜角为$\alpha+\Delta\alpha$(图4-24)，通常用比值

$$\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|},$$

即单位弧段上切线转角的大小来表示弧段$\widehat{MM'}$的平均弯曲程度，称这个比值为弧段$\widehat{MM'}$的平均曲率，记为

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

平均曲率只给出弧段弯曲的大致情况，一般地，曲线在各点处的弯曲程度常常不同．因此平均曲率还不能准确地刻划曲线在各点处的弯曲程度．我们仿照从平均速度引进瞬时速度的方法，利用平均曲率的极限定义曲线在一点处的曲率．

定义 当点M'沿着曲线趋于点M时，即$\Delta s\to 0$时，平均曲率$\overline{K}$的极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

如果存在，则称这个极限为曲线在点M处的曲率，记为K，即

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

例1 求直线上各点处的曲率.

解 对于直线来说，切线与直线本身重合，当点沿着直线移动时，切线的倾斜角都不变，故$\Delta\alpha=0$，$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$，于是

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0.$$

这就是说，直线上各点处的曲率都等于零，这与熟知的直觉，直线是不弯曲的认识是一致的.

例2 求半径为R的圆上任一点处的曲率.

解 由图4-25，M为圆上任一点，M'为圆上的另一点，过这两点的切线分别为MT与$M'T'$，切线的转角为$\Delta\alpha$，且有

$$|\Delta s|=|\widehat{MM'}|=R|\Delta\alpha|,$$

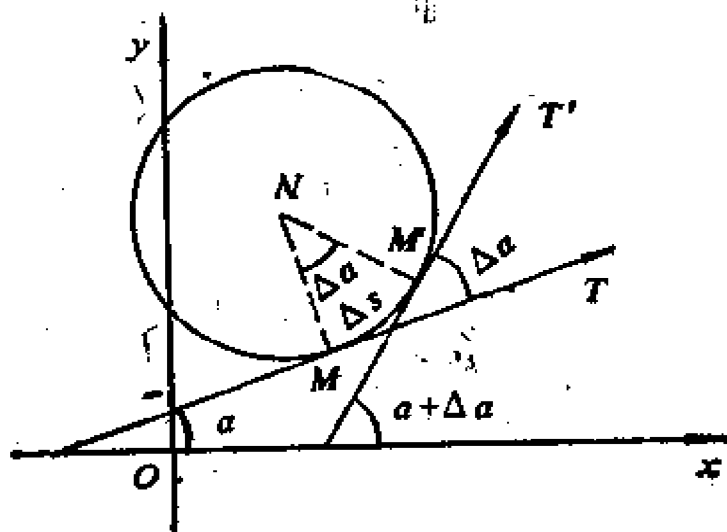


图 4-25

圆弧$\widehat{MM'}$的平均曲率为

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\frac{|\Delta\alpha|}{R|\Delta\alpha|}=\frac{1}{R},$$

所以点M处的曲率为

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\overline{K}=\frac{1}{R}.$$

这就是说，圆上各点处的曲率都等于半径R的倒数$\frac{1}{R}$，同一圆上各点处的弯曲程度都一样，而且半径愈小，弯曲愈甚，这与我们直觉的认识完全一致.

下面根据曲率的定义，推导出一般情况下的计算公式.

设曲线$y=f(x)$，其中$f(x)$具有二阶导数，显然这时$f'(x)$是连续函数，从而此曲线是光滑的．根据导数的几何意义，有$\operatorname{tg}\alpha=y'$，两边对$x$求导数，得

$$\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y'',$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{\sec^2\alpha}=\frac{y''}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2},$$

$$\mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

又由弧微分定义，知

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

于是得到曲率公式

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \qquad (8.4)$$

如果曲线由参量方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

给出，则由参量函数微分法，分别求出y_x'及y_x''为

$$y_x'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad y_x''=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

代入(8.4)式，得

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}\tag{8.5}$$

例3 问抛物线$y=-2x^2+4x+1$上哪一点处的曲率最大？并求出最大的曲率.

解 因为

$$y'=-4x+4,\quad y''=-4,$$

代入曲率公式(8.4)，得

$$K=\frac{4}{[1+16(x-1)^2]^{3/2}},$$

由于K的分子是常数4，当且仅当$16(x-1)^2=0$，即$x=1$时，分母取最小值，从而K取得最大值4，于是曲线上点$M(1,3)$(即抛物线的顶点)处的曲率最大，最大的曲率等于4.

在有些工程实际问题中，例如土木建筑工程或机械制造中的梁的弯曲程度很小，各点处切线的倾斜角α也很小，从而$|y'|=|\mathrm{tg}\alpha|$与1比较起来小得多(工程上记为$|y'|\ll 1$)，那么



图 4-26

$$1+y'^2\approx 1,$$

从而可以得到曲率的近似公式

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\approx|y''|.$$

三 曲率圆

设曲线$y=f(x)$在点$M(x, y)$处的曲率为$K(K\neq 0)$. 过点M作切线MT，并作法线MN指向曲线的凹侧（图4-27），在MN上取一点C，使$|MC|=\frac{1}{K}=\rho$，以C为圆心，ρ为半径作圆，则这个圆上各点处的曲率恰好也是K，我们称这个圆为曲线在M点的曲率圆，称ρ为曲率半径，称点C为曲率中心. 曲率圆与曲线在点M处有三个相同：相同的切线，相同的凹向，相同的曲率，所以曲率圆也叫密切圆.

当$K=0$时，就认为曲率半径为无限大.

下面求曲线在对应于点$M(x, y)$的曲率中心$C(\xi, \eta)$的坐标.

根据曲率圆、曲率中心的定义，设曲率圆上的流动坐标为(α, β)，则曲线$y=f(x)$在点$M(x, y)$处的曲率圆的方程为

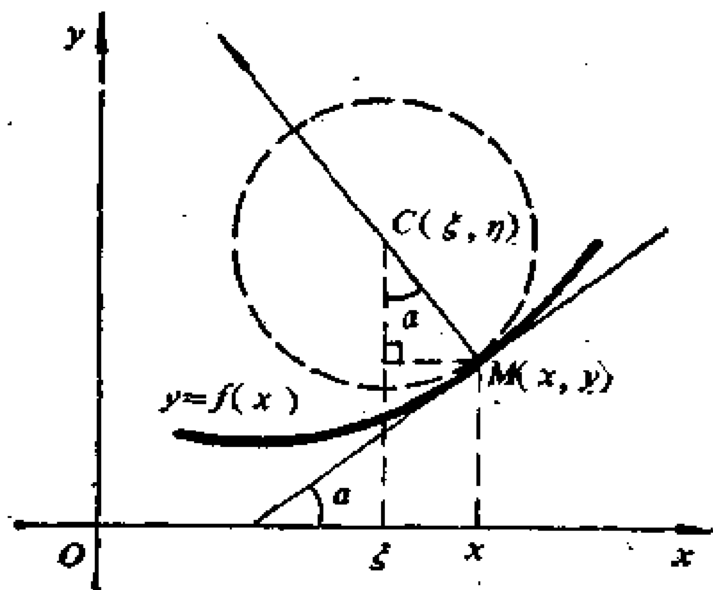


图 4-27

$$(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2=\rho^2,$$

其中

$$\rho^2=\frac{1}{K^2}=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

又因为点$M(x, y)$在曲率圆上，故有

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2. \qquad (1)$$

由于曲率圆的半径CM的斜率为

$$k_1=\frac{y-\eta}{x-\xi},$$

而过点M的切线MT与半径CM垂直（图4-27），故切线MT的斜率为

$$y'=-\frac{1}{k_1}=-\frac{x-\xi}{y-\eta}. \qquad (2)$$

那么

$$x-\xi=-y'(y-\eta),$$

代入(1)式，得

$$(y-\eta)^2=\frac{\rho^2}{1+y'^2}=\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

我们注意到，当$y''>0$时，曲线为凹弧，根据曲率中心的定义可知$y-\eta<0$；当$y''<0$时，曲线为凸弧，同理可知$y-\eta>0$。这就是说，y''与$y-\eta$总是符号相反，取上式的平方根，得

$$y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''},$$

$$x-\xi=-y'(y-\eta)=\frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

从而得到曲率中心的坐标为

四* 渐屈线与渐伸线

设曲线L上每一点处的曲率都不等于零，则曲线L上每一点都对应一个确定的曲率中心. 当点$M(x, f(x))$沿着曲线L: $y=f(x)$移动时，对应的曲率中心C的轨迹曲线L'称为曲线L的渐屈线，而称曲线L为曲线L'的渐伸线或渐开线（图4-28），所以渐屈线的参量方程为

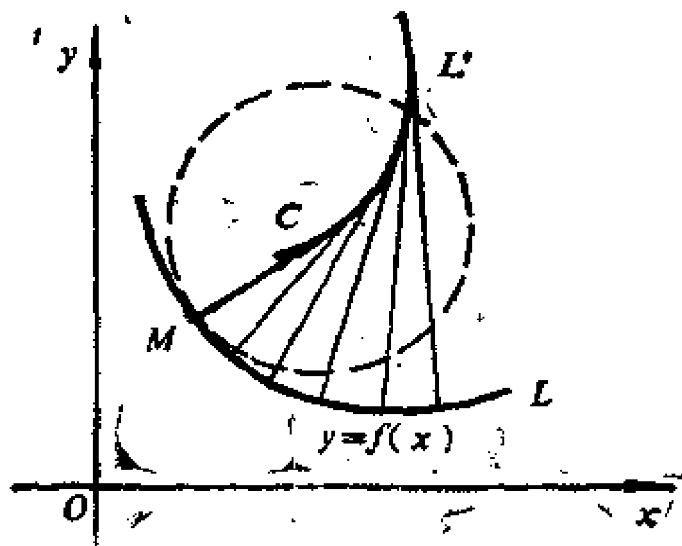


图 4-28

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{y'}{y''}(1+y'^2), \\ \eta = y + \dfrac{1}{y''}(1+y'^2). \end{cases} \tag{8.7}$$

其中$y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$, x为参量，直角坐标$\xi o \eta$与xoy重合.

例 1 求抛物线$y=ax^2$的渐屈线方程.

解 因为$y=ax^2$, $y'=2ax$, $y''=2a$, 代入(8.7)式，就得到渐屈线的参量方程为

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{2ax}{2a}(1+4a^2x^2) = -4a^2x^3, \\ \eta = ax^2 + \dfrac{1}{2a}(1+4a^2x^2) = \dfrac{1}{2a} + 3ax^2. \end{cases}$$

消去参量x，得到

$$\xi^2=\frac{16}{27}a\left(\eta-\frac{1}{2a}\right)^3.$$

它的图形是半立方抛物线（图4-29）。

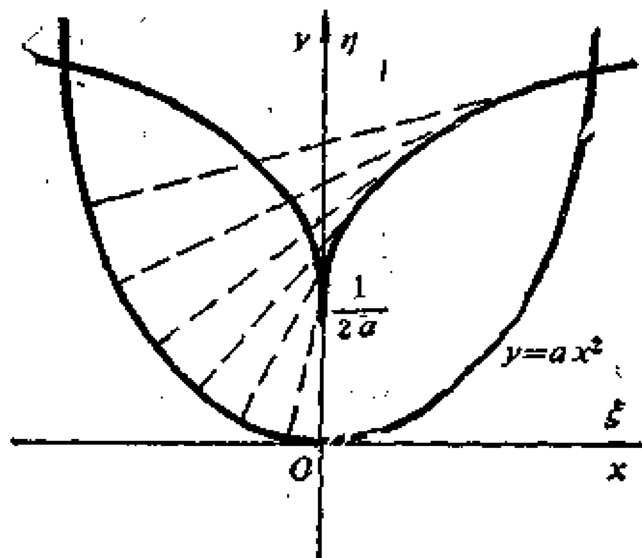


图 4-29

例2 求摆线L：

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases} \quad (1)$$

的渐屈线方程。

解 因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

代入公式(8.7)，化简便得摆线的渐屈线方程为

$$\begin{cases}\xi=a(t+\sin t),\\ \eta=a(\cos t-1).\end{cases} \quad (2)$$

其中t为参量。直角坐标系$\xi o\eta$与xoy系重合、为了作出渐屈线(2)

的图形，令 $t=\pi+\tau$，代入（2），得

$$\begin{cases}\xi-a\pi=a(\tau-\sin\tau),\\ \eta+2a=a(1-\cos\tau).\end{cases} \tag{3}$$

再令 $\xi-a\pi=\xi_1$，$\eta+2a=\eta_1$，则得

$$\begin{cases}\xi_1=a(\tau-\sin\tau),\\ \eta_1=a(1-\cos\tau).\end{cases} \tag{4}$$

在新坐标系 $\xi_1O_1\eta_1$ 中，（4）式仍是一摆线．将旧坐标系 $\xi O\eta$ 平移到新原点 $O_1(a\pi,\ -2a)$ 而得到 $\xi_1O_1\eta_1$ 坐标系，其图形见图4-30.

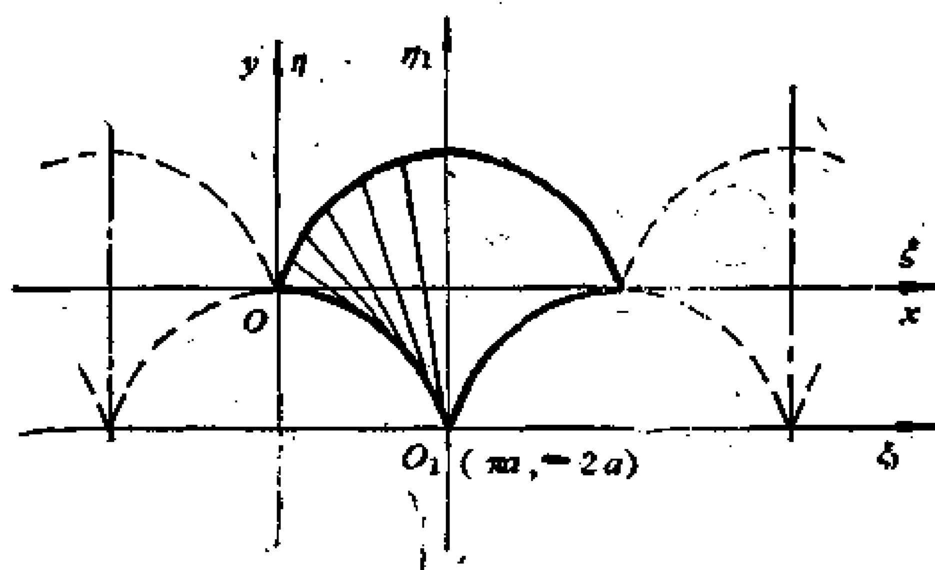


图 4-30

§9　方程的近似根

解方程 $f(x)=0$，是科学技术和工程实际常见的问题，但是要求出方程实根的准确值，一般比较困难，这就提出了求方程实根近似值的问题.

为了求方程 $f(x)=0$ 的近似根，首先要确定根的大致范围，也就是要确定一个区间 $[a,\ b]$ 使得所求的实根是位于这个区间内的

唯一实根，并且称$[a, b]$为所求实根的隔离区间．为此假定函数$f(x)$满足下面两个条件：

（1） 在区间$[a, b]$上$f'(x)$，$f''(x)$均保持符号不变；

（2） $f(a)$与$f(b)$异号．

这时，函数$f(x)$在区间$[a, b]$上单调连续且凹向不变，这就保证方程$f(x)=0$在$[a, b]$上有且仅有一个实根．从而$[a, b]$就形成了一个隔离区间，把所求的实根隔离出来．

满足上述条件（1）、（2）的函数$y=f(x)$的图形不外乎图4-31（1）、（2）、（3）、（4）四种情形．

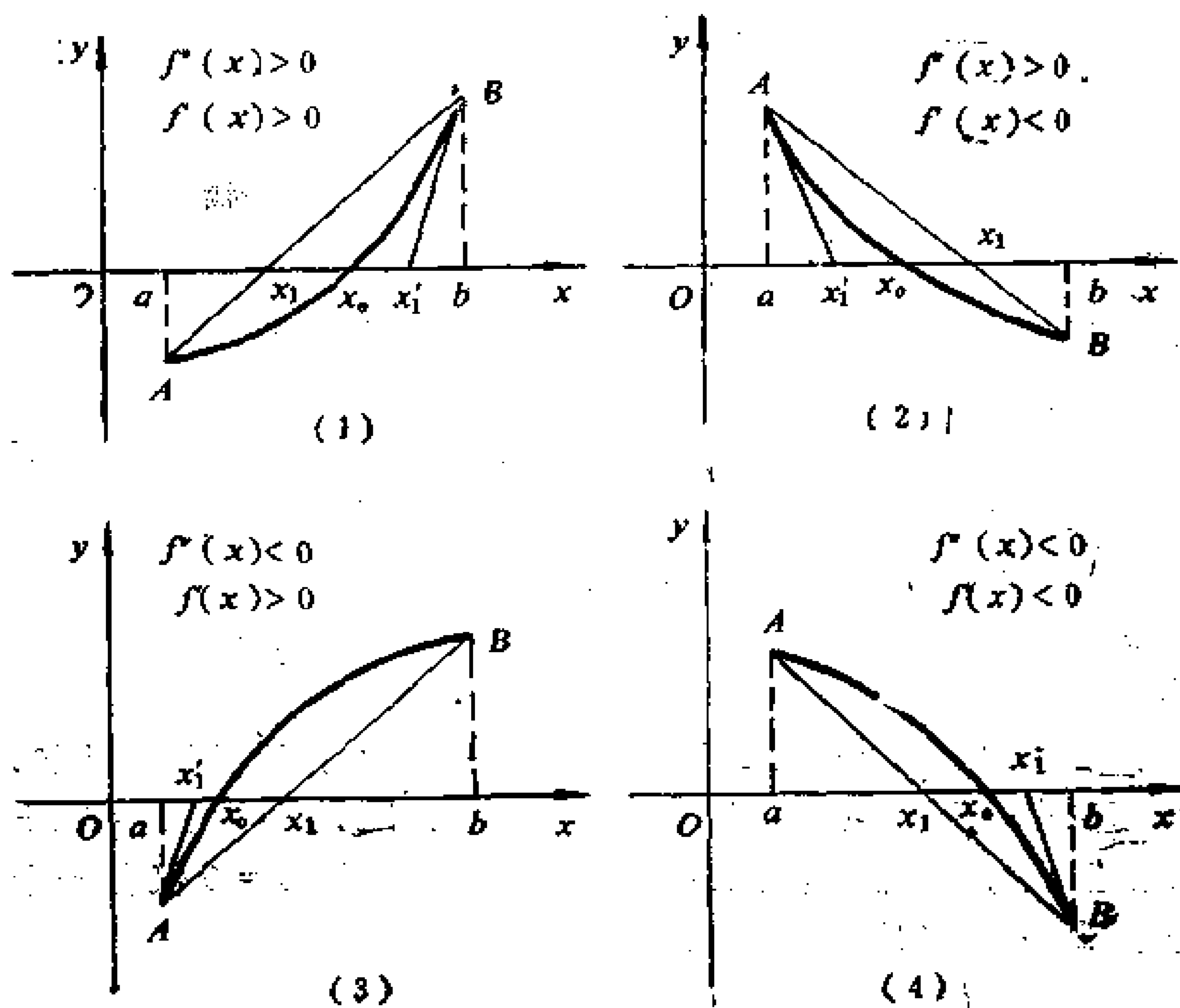


图 4-31

下面介绍求方程近似根的弦位法和切线法.

弦位法的基本思想，就是用弦与x轴的交点的横坐标，逐次代替曲线$y=f(x)$与x轴交点的横坐标. 如图4-31弦AB的方程为

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

或

$$y-f(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

令$y=0$，求得弦AB与x轴交点的横坐标x_1为

$$x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a), \tag{1}$$

或

$$x_1=b-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(b). \tag{2}$$

由图4-31可以看出，$a<x_1<b$，在(1)、(4)图形中，x_1比a更接近于根x_0，在(2)、(3)图形中，x_1比b更接近于根x_0，所以x_1比a，或比b更接近于根x_0，故x_1可作为根x_0的近似值.

用同样的方法，从新的隔离区间(a, x_1)或(x_1, b)出发，可以得到比x_1更接近于x_0的近似值x_2，如此继续施行这样的方法，就可以求得具有足够准确的近似值.

例1 用弦位法求方程$f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$的近似根.

解 因为$f(0)=-1.4<0$，$f(1)=1.6>0$，所以在区间$(0, 1)$内至少有一个实根. 又$f'(x)=3x^2+2.2x+0.9$，$f''(x)=6x+2.2$在区间$(0, 1)$上都保持正号，故在$(0, 1)$内$f(x)=0$仅有一个实根. 由图4-31(1)可知，用公式(1)得

$$x_1=0-\frac{1-0}{f(1)-f(0)}f(0)=\frac{1.4}{3.0}\approx 0.467.$$

因为$f(0.467)<0$，所在$[0.467, 1]$上再用公式(1)得

$$x_2=0.467-\frac{1-0.467}{f(1)-f(0.467)}f(0.467)\approx 0.619.$$

继续用同样的方法可求得：

$x_3\approx 0.658$，$x_4\approx 0.668$，$x_4\approx 0.670$，$x_5\approx 0.670$. x_6与x_6的前三位数字相同，由计算可知$f(0.670)\approx -0.002<0$，$f(0.671)\approx 0.0013>0$，故实根在区间$[0.670, 0.671]$之中，若取0.670为方程实根的近似值，其误差不超过0.001.

另一种方法——切线法的基本思想，是用曲线弧端点处的切线与x轴交点的横坐标，逐次代替曲线$y=f(x)$与x轴交点的横坐标. 由图4-31可知，由曲线弧端的纵坐标与$f''(x)$同号的一端点作曲线的切线，这切线与x轴交点的横坐标x_1'比a，或比b更接近于方程的根x_0，于是可用x_1'作为x_0的近似值.

曲线弧端点A或B处的切线方程为

$$y-f(a)=f'(a)(x-a),$$

或

$$y-f(b)=f'(b)(x-b).$$

令$y=0$，求得这切线与x轴交点的横坐标x_1'为

$$x_1'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad (3)$$

或

$$x_1'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (4)$$

重复地应用上面公式(3)或(4)，就可以求得具有足够精确的近似值. 但须注意，当$f(a)$与$f''(x)$同号时，用公式(3)；当$f(b)$与$f''(x)$同号时，用公式(4).

例2 用切线法求方程$f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$的

近似根.

解 由例1已知方程$f(x)=0$在区间[0, 1]内有且只有一个实根，而$f(1)=1.6>0$与$f''(x)>0$同号，故采用公式(4)，得

$$x_1'=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0.738;$$

$$x_2'=0.738-\frac{f(0.738)}{f'(0.738)}\approx 0.674;$$

$$x_3'=0.674-\frac{f(0.674)}{f'(0.674)}\approx 0.671;$$

$$x_4'=0.671-\frac{f(0.671)}{f'(0.671)}\approx 0.671.$$

与例1类似，可以取0.671作根的近似值，其误差不超过0.001.

由例1和例2可以看出，用弦位法和切线法求同样准确的近似根，切线法比弦位法要快些.

弦位法与切线法同时使用称为综合法，这种方法的基本思想是从实根x_0的两边来逼近x_0，可加快计算过程.

例3 用综合法求方程$f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$实根的近似值.

解 依次用弦位法，切线法求得实根的近似值分别为x_i，x_i' ($i=1, 2, 3$)如下：

$$x_1=0-\frac{1-0}{f(1)-f(0)}f(0)\approx 0.467,$$

$$x_1'=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0.738;$$

$$x_2=0.467-\frac{0.738-0.467}{f(0.738)-f(0.467)}f(0.467)\approx 0.658,$$

$$x_2' = 0.738 - \frac{f(0.738)}{f'(0.738)} \approx 0.674;$$

$$x_3 = 0.658 - \frac{0.674 - 0.658}{f(0.674) - f(0.658)} f(0.658) \approx 0.670,$$

$$x_3' = 0.674 - \frac{f(0.674)}{f'(0.674)} \approx 0.671.$$

这里，只用三步就得到同样精确的近似值.

第五章 不定积分

微分学的基本问题是已知一个函数$F(x)$，求它的导数$F'(x)$. 例如，已知质点作直线运动时的运动规律为$s=s(t)$. 要求质点在时刻t的速度$v(t)$，只需要将函数$s=s(t)$对t求导数就得到了：$v(t)=\frac{ds}{dt}=s'(t)$.

在实际问题中，往往会遇到这样的问题：已知一个函数的导数，要求出这个函数来. 例如，已知质点作直线运动时的速度为$v=v(t)$. 求在一段时间内质点走过的路程$s=s(t)$. 已知一个函数$f(x)$，求函数$F(x)$，使$F'(x)=f(x)$. 就是本章要研究的问题.

从正、反两个方面对问题进行讨论，是研究问题的一种基本方法，在学习不定积分时，结合微分学来学习是十分有益的.

§ 1 不定积分的概念

一 原函数

1 原函数

定义 1 设函数$F(x)$与$f(x)$在区间I内：对任意的$x\in I$，都有：

$$F'(x)=f(x), \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx.$$

则称$F(x)$是$f(x)$在区间I内的一个原函数.

今后，凡提到原函数，都是指在某一个区间上而言的，对此就不再一一说明了.

求原函数是求导数的逆运算，要判断一个函数$F(x)$是不是$f(x)$的原函数，只要看它的导数$F'(x)$是不是$f(x)$就行了，例如

其中，$f(x)$叫做被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$叫做被积式，x叫做积分变量，$\int$叫做积分号.

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，那末$f(x)$的任何一个原函数都可以表示为$F(x)+C$（C为常数）. 因此，形如$F(x)+C$（C为任意常数）的一族函数就是$f(x)$的全体原函数，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中，任意常数C又叫做积分常数.

若$F'(x)=f(x)$，则$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，因此不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$又可以写为$\int \mathrm{d}F(x)$，由定义 2 知不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$代表了$f(x)$的全体原函数. 根据定理1，在求不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$时，只需先求出它的一个原函数，然后再加上积分常数就行了.

例 1 求$\int 3x^2\mathrm{d}x$.

解 因为$(x^3)'=3x^2$，所以x^3是$3x^2$的一个原函数，故

$$\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C.$$

例 2 求$\int \cos x\mathrm{d}x$.

解 因为$\sin x$是$\cos x$的一个原函数，所以

$$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C.$$

例 3 求$\int gt\mathrm{d}t$.

解 因为$\frac{1}{2}gt^2$是gt的一个原函数，所以

$$\int gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C.$$

二 不定积分的几何意义

在平面直角坐标系xoy中，$f(x)$的任意一个原函数的图形称为$f(x)$的一条积分曲线，其方程是$y=F(x)$. 而$f(x)$的全体原函数$F(x)+C$的图形称为$f(x)$的积分曲线族. 它们的方程是$y=F(x)+C$或$y=\int f(x)\mathrm{d}x$（图5-1）.

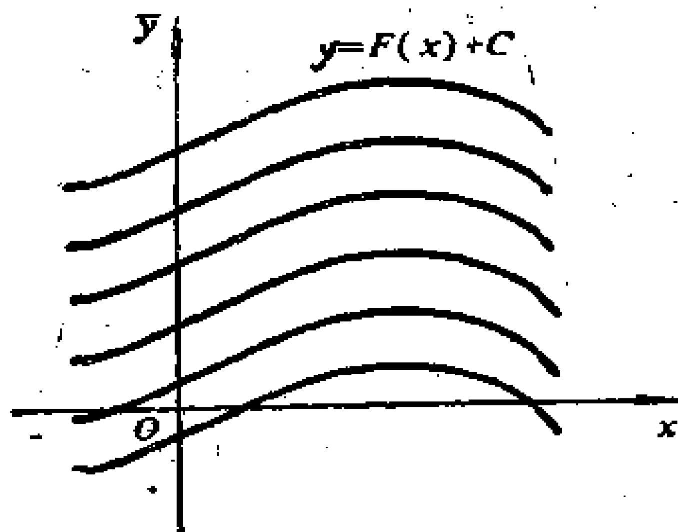


图 5-1

显然，积分曲线族中的任意一条曲线，都可以由曲线$y=F(x)$沿oy轴平行移动一段距离得到．因此，积分曲线族中的所有积分曲线都是彼此平行的，换一句话说，在积分曲线族上横坐标相同的点处，所有的积分曲线的切线都是互相平行的。这是因为

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),$$

即所有的切线都有相同的斜率$f(x)$.

因此，不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示了$f(x)$的积分曲线族$y=F(x)+C$.

在一些具体问题中，如果已知一条积分曲线经过定点(x_0,y_0)，要求这条积分曲线，可以先用不定积分的方法求出积分曲线族$y=F(x)+C$．然后，再根据已知条件$y_0=F(x_0)+C$，解出常数：$C=y_0-F(x_0)$．这样就得到了所求的积分曲线$y=F(x)+[y_0-F(x_0)]$.

例4 一条曲线经过点(2，3)，且曲线上任意一点(x, y)处的切线斜率为$2x$，求此曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为$y=F(x)$，由题意知$F'(x)=2x$，即$F(x)$是$2x$的一个原函数.

因为 $\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$,

所以，所求的曲线是积分曲线族$y=x^2+C$中的一条，根据曲线经过点(2，3)，则得

$$3=2^2+C,$$

知

$$C=-1.$$

故所求的曲线的方程为$y=x^2-1$.

象例 4 中确定积分常数的条件，通常称为定解条件，曲线经过点(2，3)这一定解条件也可以写作：$y|_{x=2}=3$，或$y(2)=3$.

三　不定积分的性质

性质 1　设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

(这里 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)$).

证明　设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$；

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.　　　　证毕

性质 1 清楚地表明了不定积分运算与微分运算之间的互逆关系，从(1)中可以看到，函数$f(x)$先积分再求导数，结果等于$f(x)$；从(2)中可以看到，对函数$F(x)$先求导数再积分，则等于$F(x)$加任意常数C.

性质 2　被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来：

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k\neq 0 \text{ 为常数})$$

证明　因为$\left(k\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=k\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=kf(x)$

$$\left(\int kf(x)\mathrm{d}x\right)'=kf(x),$$

且两端均含任意常数，所以 $\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$. 证毕

性质3 有限个函数的代数和的积分，等于各个函数积分的代数和，即

$$\int(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x))\mathrm{d}x$$

$$=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明 上式右边的导数等于左边的被积函数.

$$\left(\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x\right)'$$

$$=\left(\int f_1(x)\mathrm{d}x\right)'\pm\left(\int f_2(x)\mathrm{d}x\right)'\pm\cdots$$

$$\pm\left(\int f_n(x)\mathrm{d}x\right)'$$

$$=f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x).$$

且右边包含了一个任意常数（把 n 个任意常数合并为一个），故有

$$\int(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x))\mathrm{d}x$$

$$=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$ 证毕

四 基本积分表

由于积分运算与微分运算是互逆的运算，因此，由导数基本公式就可以得到相应的积分基本公式。

基本积分表:

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$ （k为常数），

(2) $\int x^{a}dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad (a\neq-1)$;

(3) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$;

(4) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$;

(5) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq1)$;

(6) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$;

(7) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$;

(8) $\int \frac{1}{\cos^{2}x}\,dx=\int \sec^{2}x dx=\mathrm{tg}x+C$;

(9) $\int \frac{1}{\sin^{2}x}\,dx=\int \csc^{2}x dx=-\mathrm{ctg}x+C$;

(10) $\int \sec x\,\mathrm{tg}x\,dx=\sec x+C$;

(11) $\int \csc x\,\mathrm{ctg}x\,dx=-\csc x+C$;

(12) $\int \frac{1}{1+x^{2}}\,dx=\mathrm{arctg}x+C$;

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx=\arcsin x+C$;

(14) $\int \mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x+C$;

(15) $\int \mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x+C$,

基本积分表是求不定积分的基础，必须熟记，下面利用基本积分表和不定积分的简单性质，求一些不定积分.

例5 求$\int \frac{1}{x^2}dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C$

$$= -\frac{1}{x}+C.$$

例6 求$\int x^3\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int x^3\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{7}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1}+C$

$$= \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+C.$$

例7 求$\int\left(3\sin x+\frac{1}{5\sqrt{x}}\right)dx$.

解 $\int\left(3\sin x+\frac{1}{5\sqrt{x}}\right)dx = 3\int \sin x\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$= -3\cos x+\frac{2}{5}\sqrt{x}+C.$$

注意，在分项积分后，每一个不定积分的结果都应加上一个任意常数，但因为任意常数之和仍是任意常数，所以只要在最后结果中加上一个任意常数就可以了.

在求不定积分的过程中，适当应用代数及三角公式对被积函数进行恒等变形，有利于把所求的积分化为基本积分表中已有的形式，使积分可以顺利求出.

例8 求$\int\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}dx$.

解 $$\int\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}dx=\int\frac{x^2-x-2}{x^2}dx$$
$$=\int\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$=\int dx-\int\frac{1}{x}dx-2\int\frac{1}{x^2}dx$$
$$=x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C.$$

例9 求$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$

解 $$\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$
$$=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=x-\mathrm{arctg}x+C.$$

例10 求$\int\mathrm{tg}^2xdx$.

解 $$\int\mathrm{tg}^2xdx=\int(\sec^2x-1)dx=\int\sec^2xdx-\int dx$$
$$=\mathrm{tg}x-x+C.$$

§2 基本积分法

利用基本积分表与积分的性质，只能计算为数不多的积分，为了扩大计算积分的范围，本节讲述基本积分法——换元积分法与分

部积分法.

一 换元积分法

1 第一类换元积分法

定理1 设$F(u)$是$f(u)$的一个原函数，$u=u(x)$有连续的导数，则有

$$\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=F[u(x)]+C.$$

证明 因为$F'(u)=f(u)$，所以$\int f(u)du=F(u)+C.$

由于 $\mathrm{d}F[u(x)]=f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=f[u(x)]\mathrm{d}u(x)$，

故 $$\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=\int f[u(x)]\mathrm{d}u(x)$$

$$=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=u(x)}$$

$$=[F(u)+C]_{u=u(x)}=F[u(x)]+C$$

证毕

第一类换元积分法，实际上是用变量代换的方法来计算不定积分.

例1 求$\int\cos3x\mathrm{d}x$.

解 $$\int\cos3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\cos3x\cdot3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\cos3x\cdot(3x)'\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{设}u=3x}\frac{1}{3}\int\cos u\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\sin u+C.$$

代回原来的变量x，得

$$\int\cos3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin3x+C.$$

例 2 求$\int(2x+1)^8\mathrm{d}x$.

解 $\int(2x+1)^8\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x+1)^8\cdot 2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int(2x+1)^8(2x+1)'\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{设}u=2x+1}\frac{1}{2}\int u^8\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}u^9+C$$

$$=\frac{1}{18}(2x+1)^9+C.$$

例 3 求$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x^2)'\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{设}u=1-x^2}-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 4 求$\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)'\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{设}u=x^2}\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}u+C$$

例 7 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$，$(a\neq 0)$.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

例 8 求 $\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{1}{4+(x-2)^2}dx$

$$=\int \frac{1}{2^2+(x-2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

例 9 求 $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

解 $\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$

运用换元积分法，必须要熟悉基本积分公式及一些常用的微分式，如：

$dx=\frac{1}{a}d(ax\pm b)=-d(a-x)$；

$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2a}d(ax^2\pm b)=-\frac{1}{2}d(a^2-x^2)$；

$\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$；

$e^x dx=d(e^x)$；

$\cos x dx=d(\sin x)$；

$\sin x dx=-d(\cos x)$

等等．在运用换元积分法时，常要用到一些技巧，并进行一些适当的代数或三角函数的运算，把被积函数变形后，再用换元积分法．

例10 求$\int \mathrm{tg}x\ dx$.

解 $\int \mathrm{tg}x\ dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$=-\ln|\cos x|+C.$

类似地有 $\int \mathrm{ctg}x\ dx=\ln|\sin x|+C$.

例11 求$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$.

解 $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\ dx=\int \frac{e^x}{e^x+1}\ dx=\int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1}$.

$=\ln(e^x+1)+C.$

上面的两个例子中都遇到了形如$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$（或$\int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)}$）的积分，在被积函数中分子恰好是分母的导数，这类积分可以利用下面的公式

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ dx=\int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

例12 求$\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx$.

解 $\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx=\int \frac{dx}{\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$

$$=\ln|\operatorname{tg}x|+C.$$

例13 求 $\int \csc x\,dx$.

解 $\int \csc x\,dx=\int \frac{1}{\sin x}\,dx=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

因为 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\operatorname{ctg}x$,

所以上面的不定积分又可以表示为

$$\int \csc x\,dx=\ln|\csc x-\operatorname{ctg}x|+C.$$

例14 求 $\int \sec x\,dx$.

解 $\int \sec x\,dx=\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C.$$

例15 求$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}\mathrm{d}x-\int \frac{\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x)$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

例16 求$\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sin^3 x\mathrm{d}x=\int \sin^2 x\cdot \sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\int \cos^2 x\mathrm{d}(\cos x)-\int \mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

例17 求$\int \sin^2 x\cos^5 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sin^2 x\cos^5 x\mathrm{d}x=\int \sin^2 x\cos^4 x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x).$$

$$=\int(\sin^2x-2\sin^4x+\sin^6x)\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{2}{5}\sin^5x+\frac{1}{7}\sin^7x+C.$$

例18 求$\int\cos^2x\sin^4x\mathrm{d}x$.

解

$$\int\cos^2x\sin^4x\mathrm{d}x=\int(\cos x\sin x)^2\sin^2x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{\sin2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1-\cos2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int(\sin^22x-\sin^22x\cos2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}\int\sin^22x\mathrm{d}(2x)$$

$$-\frac{1}{16}\int\sin^22x\cos2x\mathrm{d}(2x)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{2x}{2}-\frac{1}{4}\sin4x\right)$$

$$-\frac{1}{16}\int\sin^22x\mathrm{d}(\sin2x)$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin4x-\frac{1}{48}\sin^32x+C$$

通过上面几个例子，对形如

$\int\sin^mx\cos^nx\mathrm{d}x$，（ m， n 为自然数或零）

的积分，都有了处理的方法，但当m， n 都为偶数时，计算起来则要繁一些.

例19 求$\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$，（$a$为非零常数），

解 $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{d(a+x)}{a+x} - \int \frac{d(a-x)}{a-x}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|a+x| - \ln|a-x|)+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

类似地，有

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例20 求$\int \sin5x\cos3x\,dx$.

解 $\int \sin5x\cos3x\,dx=\int \frac{1}{2}(\sin8x+\sin2x)dx$

$$=\frac{1}{16}\int \sin8x\,d(8x)$$

$$+\frac{1}{4}\int \sin2x\,d(2x)$$

$$=-\frac{1}{16}\cos8x-\frac{1}{4}\cos2x+C$$

换元积分法没有固定的规律可循，要想掌握它，除了熟悉一些常见的典型例子之外，还必须多作练习.

2　第二类换元积分法

第一类换元积分法，利用代换：$u=u(x)$，把积分$\int f[u(x)]u'(x)dx$化为$\int f(u)du=F[u(x)]+C$，从而使不定积分$\int f[u(x)]u'(x)dx$得到解决. 可是，有的不定积分，则要用相反

的方式来换元，若不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$不容易直接计算，但是令代换：$x=\varphi(t)$之后，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$后面的一个对变元$t$的不定积分容易求出．则称这种换元的方法为第二类换元积分法．

定理2　设$x=\varphi(t)$是单调的，有连续导数的函数，且$\varphi'(t)\neq 0$，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$有原函数$F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

其中$\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数．

证明　因为$x=\varphi(t)$是单调的，有连续导数的函数，且$\varphi'(t)\neq 0$，所以存在可导的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F[\varphi^{-1}(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x).$$

因此，$F[\varphi^{-1}(x)]$是$f(x)$的原函数，于是得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

例21　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解　为了去掉根式，可令$x=t^2(t\geqslant 0)$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}\overset{x=t^2}{=\!=\!=}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int\frac{(1+t)-1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\int\mathrm{d}t-2\int\frac{\mathrm{d}(1+t)}{1+t}$$

$$=2t-2\ln|1+t|+C$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

例22 求$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，$(a>0)$.

解 为了去掉被积函数中的根式，可令

$x=a\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则$dx=a\cos t\,dt$，

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$，于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\xlongequal{x=a\sin t}\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

由代换式 $x=a\sin t$，得

$\sin t=\frac{x}{a}$，$t=\arcsin\frac{x}{a}$，

$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，

$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$.

因此有

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

由代换式$x=a\sin t$求$\cos t$时通常采用三角形法．从

$\sin t=\frac{x}{a}$，作一个直角三角形，使它的一个锐角为t，斜边为a。角t的对边为x（图5-2）．由勾股定理知角t相邻的直角边为$\sqrt{a^2-x^2}$，故$\cos t=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$．

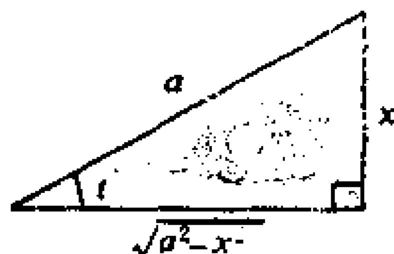


图 5-2

例23 求$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$，$(a>0)$.

解 令$x=a\mathrm{tg}t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$dx=a\sec^2 t\,dt,\quad \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\mathrm{tg}^2 t}=a\sec t.$$

于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\xlongequal{x=a\mathrm{tg}t}\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt$$

$$=\int\sec t\,dt=\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|+C_1.$$

为了把$\sec t$、$\mathrm{tg}t$还原为x的函数，仍用三角形法．由代换式$x=a\mathrm{tg}t$，有$\mathrm{tg}t=\frac{x}{a}$．作一个直角三角形，使它的一个锐角为t，角t的对边为x，相邻的直角边为a，则斜边为$\sqrt{a^2+x^2}$，得$\sec t=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}$（图5-3）．

最后得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C.$$

其中$C=C_1-\ln a$仍为任意常数.

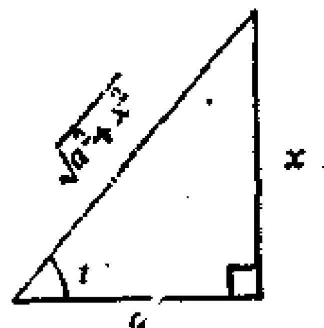


图 5-3

例24 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，$(x>a>0)$.

$$=\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{a}+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$$

对于$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$,（$x>a>0$），令$x=a\mathrm{ch}t$ （$t>0$）

有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\mathrm{sh}t}{a\mathrm{sh}t}dt=\int dt=t+C_1$$

$$=\mathrm{ch}^{-1}\frac{x}{a}+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

在上面的换元积分法的例子中，有些积分的结果是今后经常会遇到的，它们通常被当作公式来使用．继前面的基本积分表之后，还有下面的10个公式：

(16) $\int\mathrm{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$;

(17) $\int\mathrm{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C$;

(18) $\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\mathrm{tg}x|+C$;

(19) $\int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\mathrm{ctg}x|+C$;

(20) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$;

(21) $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$;

(22) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$;

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$;

(24) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

(25) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

二　分部积分法

分部积分法与换元积分法一样，是基本的积分方法．它是与函数乘积的微分法相对应的一种积分方法．

定理3　设$u(x)$、$v(x)$具有连续的导数，则有分部积分公式：

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx,$$

或

$$\int u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x).$$

证明　由$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$，

移项得

$$u(x)\cdot v'(x)=[u(x)\cdot v(x)]'-u'(x)v(x),$$

积分有

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)u'(x)dx.$$

或

$$\int u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x).$$　　证毕

运用分部积分公式计算某个积分时，先要把积分写成$\int u(x)dv(x)$的形式。如果求$\int u(x)dv(x)$有困难，而$\int v(x)du(x)$比较容易求时，可以用分部积分公式来计算。

例25 求$\int xe^x dx$

解 设$u(x)=x$，$v(x)=e^x$，则$du(x)=dx$，

$dv(x)=de^x=e^x dx$.

由分部积分公式得

$$\int xe^x dx=\int x de^x=xe^x-\int e^x dx$$
$$=xe^x-e^x+C.$$

例26 求$\int x\cos x dx$.

解 设$u(x)=x$，$v(x)=\sin x$，则

$du(x)=dx$，$dv(x)=\cos x dx=d\sin x$.

由分部积分公式，得

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x=x\sin x-\int \sin x dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C.$$

例27 求$\int \operatorname{arctg} x dx$.

解 设$u(x)=\operatorname{arctg} x$，$v(x)=x$，则有

$$\int \operatorname{arctg} x dx=x\operatorname{arctg} x-\int x d\operatorname{arctg} x$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

例28 求 $\int x\ln x\,dx$.

解 设$u(x)=\ln x$，$dv(x)=xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)$，则

$$\int x\ln xdx=\int \ln xd\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}d(\ln x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

在计算熟悉之后，就可以不写出$u(x)$，$v(x)$而直接应用分部积分公式.

例29 求$\int x^2\sin x\,dx$.

解 $\int x^2\sin x\,dx=\int x^2d(-\cos x)$

$$=x^2(-\cos x)-\int(-\cos x)d(x^2)$$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx$$

$$=-x^2\cos x+2\int xd(\sin x)$$

$$=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int\sin x\,dx\right]$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

有的不定积分，经过分部积分后，虽然没有直接求出该不定积分的结果，但是可以从等式中象解方程那样，解出所求的积分来.

例30 求$\int e^x \sin x dx$.

解 $$\int e^x \sin x\, dx=\int e^x d(-\cos x)$$

$$=-e^x \cos x-\int(-\cos x) de^x$$

$$=-e^x \cos x+\int e^x \cos x\, dx$$

$$=-e^x \cos x+\int e^x d(\sin x)$$

$$=-e^x \cos x+e^x \sin x-\int e^x \sin x\, dx.$$

移项后有

$$2\int e^x \sin x\, dx=e^x \sin x-e^x \cos x+2C,$$

即

$$\int e^x \sin x\, dx=\frac{1}{2} e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

例31 求$\int \sec^3 x\, dx$.

解 $$\int \sec^3 x\, dx=\int \sec x \cdot \sec^2 x\, dx=\int \sec x d(\operatorname{tg} x)$$

$$=\sec x \operatorname{tg} x-\int \operatorname{tg} x d(\sec x)$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x \mathrm{d}x$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \mathrm{d}x + \int \sec x \mathrm{d}x$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x.$$

故

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C.$$

例32 求 $\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$.

解 $\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \int \sin bx \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{a} \int e^{ax} \mathrm{d}(\sin bx)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int \cos bx \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx - \frac{1}{a} \int e^{ax} \mathrm{d}(\cos bx)\right]$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2}$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

即

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

同理可得

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C.$$

一次或多次地应用分部积分法，对某些积分来说是非常有效的，在实际演算过程中，函数 u 、v 的选择十分重要，选择适当，计算起来较为简便；选择不当，往往使积分更加难于解决. 经过反复练习，不难总结出下面的规律. 对积分

$$\int x^n e^{ax}dx、\int x^n\cos bx\,dx、\int x^n\sin bx\,dx$$

均可设 $u=x^n$，其余相应的项为dv.

$\int x^n\ln x\,dx$，设$u=\ln x$，$dv=x^n dx=d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$.

$\int x^n\arcsin x\,dx$，设$u=\arcsin x$，$dv=x^n dx=d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$.

$\int x^n\mathrm{arctg}x\,dx$，设$u=\mathrm{arctg}x$，$dv=x^n dx=d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$.

在求不定积分时，换元积分法与分部积分法两种基本积分法的交替使用，是经常会遇到的. 这种情况应当引起我们的注意，即在解题的过程中千万不要拘泥于一种方法.

例33 求$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$，$(a>0)$.

解 $$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx \xlongequal{x=a\sec t}\int a\,\mathrm{tg}t\cdot a\sec t\,\mathrm{tg}t\,dt$$

$$=a^2\int\mathrm{tg}^2t\sec t\,dt=a^2\int\mathrm{tg}t\,d(\sec t)$$

$$=a^2\left[\mathrm{tg}t\sec t-\int\sec^3t\,dt\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}(\mathrm{tg}t\sec t-\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|)+C_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

例33中最后一个等号由t的函数还原为x的函数，用到了三角形法.

类似地，有下面的结果

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

§3 几类函数的积分法

前面详细讲述了计算不定积分的基本方法，下面再介绍几类函数的积分法.

一 有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数：

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}.$$

其中，m、n是非负整数；a_0、a_1、…、a_m及b_0、b_1、…、b_n都是实数，并且多项式$P_m(x)$与$Q_n(x)$之间没有公因式，并假定$a_0\neq0$，$b_0\neq0$.

当$m\geqslant n$时，称$R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$为有理假分式；

当$m<n$时，称$R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$为有理真分式.

由初等代数知道，利用多项式的除法，有理假分式总可以化成一个多项式与一个真分式之和的形式. 例如

$$\frac{x^4+x^3}{x^2-1}=x^2+x+1+\frac{x+1}{x^2-1}.$$

多项式的积分是大家都会求的. 因此，有理函数的积分问题转化成为真分式的积分问题.

众所周知，实系数的一元n次代数方程：

$$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n=0 \qquad (1)$$

在复数域内有n个根，且只有n个根. 并且当方程(1)有一个实数根a时，方程(1)左边的多项式就能分解出一个一次因式：$(x-a)$；当方程(1)有一个复数根$\alpha+i\beta$(α、β为实数，且$\beta\neq0$)时，方程(1)也一定存在着一个共轭的复数根$\alpha-i\beta$. 则方程(1)左边的多项式就能分解出两个因式：$[x-(\alpha+i\beta)]$和$[x-(\alpha-i\beta)]$. 为了避免出现复数，这两个因式可以化为一个二次因式：

$$\begin{aligned}[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]&=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)\\&=x^2+px+q.\end{aligned}$$

这里，$p=-2\alpha$，$q=\alpha^2+\beta^2$，$p^2-4q=-4\beta^2<0$.

显然，当方程(1)有k(k为正整数)重实数根a时，方程(1)的左边的多项式就能分解出形如$(x-a)^k$的因式来；而当方程

$(m<n)$，其中$Q_n(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_hx+q_h)^{s_h}$. 这里$a_i$($i=1, 2, \cdots, r$)、$p_j$、$q_j$($j=1, 2, \cdots, h$)为实数，$k_i$、$s_j$为正整数，且$p_j^2-4q_j<0$. 则真分式$R(x)$可以分解为部分分式之和：

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\cdots$$

$$+\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\cdots$$

$$+\frac{B_1}{(x-a_r)}+\frac{B_2}{(x-a_r)^2}+\cdots+\frac{B_{k_r}}{(x-a_r)^{k_r}}$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\cdots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\cdots$$

$$+\frac{C_{s_h}x+D_{s_h}}{(x^2+p_hx+q_h)^{s_h}}.$$

其中，A_1、$\cdots$、A_{k_1}、B_1、$\cdots$、B_{k_r}、C_1、$\cdots C_{s_h}$、D_1、$\cdots D_{s_h}$均为常数（证明略）.

对于定理1，应当注意两点：

（1） 若真分式的分母$Q_n(x)$中有因式$(x-a)^k$，则分解后必含有下列k个部分分式之和：

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}.$$

其中k为正整数，a、A_1、A_2、$\cdots$、A_k都是常数. 如果$k=1$，那么分解后只含有$\frac{A_1}{x-a}$；

（2） 若真分式的分母$Q_n(x)$中有因式$(x^2+px+q)^k$，其中$p^2-4q<0$，则分解后必含有下列k个部分分式之和：

$$\frac{C_kx+D_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{C_{k-1}x+D_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}$$

这里k为正整数，p、q、C_1、C_2、$\cdots$、C_k、D_1、D_2、$\cdots$、D_k都

是常数．如果$k=1$，那么分解后只含有$\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}$.

当真分式的分母已经分解为因式的乘积之后，把它分解为部分分式，只需要做两件事：一是根据定理1正确地写出该真分式的全部部分分式；二是用待定系数法（或其它方法）确定出常数，最后得到真分式的分解式．下面举例说明具体的分解方法．

例1 把$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}$分解为部分分式.

解

$$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$=\frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)},$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

可知

$$2x=(A+B)x^2+(C-B)x+A-C.$$

比较系数有

$$\begin{cases}A+B=0,\\C-B=2,\\A-C=0.\end{cases}$$

故

$$A=1,\ B=-1,\ C=1.$$

于是得

$$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}.$$

例2 把$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)(x+3)}$分解为部分分式.

解 $$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x+3}.$$

为了确定常数A、B、C、D，通分去分母后有：

$$\begin{aligned}1=&A(x-1)(x+2)(x+3)+B(x+2)(x+3)\\&+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^2(x+2).\end{aligned}\qquad(2)$$

令$x=1$，代入(2)式得$B=\frac{1}{12}$；令$x=-2$，代入(2)式得$C=\frac{1}{9}$；令$x=-3$，代入(2)式得$D=-\frac{1}{16}$；最后可确定出：$A=-\frac{7}{144}$. 故

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)(x+3)}=\frac{-7}{144(x-1)}+\frac{1}{12(x-1)^2}+\frac{1}{9(x+2)}-\frac{1}{16(x+3)}.$$

例 3 把$\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}$分解为部分分式.

解 $$\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}=\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

通分

$$\begin{aligned}3x^4+x^3+4x^2+1&=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)\\&\quad+(Dx+E)x\\&=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2\\&\quad+(C+E)x+A.\end{aligned}$$

比较系数得

$$\begin{cases} A+B=3\ , \\ C=1\ , \\ 2A+B+D=4\ , \\ C+E=0\ , \\ A=1\ . \end{cases}$$

故知，$A=1$，$B=2$，$C=1$，$D=0$，$E=-1$. 于是

$$\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

2　有理函数的积分

既然有理函数的积分问题已经转化为多项式及真分式的积分问题，而多项式的积分是大家已经会求的. 因此，有理函数的积分问题主要是讨论真分式的积分. 由于真分式可以分解为部分分式之和，最终就把真分式的积分问题归结为下面四种类型的部分分式的积分问题：

（1）$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x$；

（2）$\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$，$(n>1)$；

（3）$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$，$(p^2-4q<0)$；

（4）$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$，$(p^2-4q<0,\ n>1)$.

这四种类型的积分，均可用基本积分法求出.

（1）$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$；

（2）当 $n>1$ 时，

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = A\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^n}$$

$$= \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n}+C;$$

（3）当 $p^2-4q<0$ 时，

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2Bx+Bp+2C-Bp}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \frac{2C-Bp}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \frac{2C-Bp}{2}$$

$$\cdot \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C;$$

（4）当 $p^2-4q<0$，且 $n>1$ 时，

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2Bx+Bp+2C-Bp}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{2C-Bp}{2}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \frac{2C-Bp}{2}$$

$$\cdot\int\frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2\right]^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{B}{2(1-n)}(x^2+px+q)^{1-n}$$

$$+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$$

这里，设 $u=x+\frac{p}{2}$，$a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

只要再求出积分 $\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$，真分式的积分问题就解决了．若令 $I_n=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$，则有递推公式

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right].\qquad(3)$$

下面，给出递推公式(3)的证明：

$$I_n=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{(u^2+a^2)-u^2}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}\mathrm{d}u-\frac{1}{a^2}\int\frac{u^2}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{u\mathrm{d}(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n}$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{1-n}\int u\mathrm{d}(u^2+a^2)^{1-n}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(1-n)}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right.$$

$$\left.-\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(1-n)}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}-I_{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right].$$

对于 $n=1$，有

$$I_1=\int\frac{1}{u^2+a^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C,$$

当 $n>1$，应用递推公式(3)有

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)}+I_1\right]$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right]+C,$$

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^2}+3I_2\right]$$

$$=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^2}+\frac{3u}{2a^2(u^2+a^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right]+C,$$

……

有了递推公式(3)，无论n为任何自然数，积分$\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$总可以计算出来．到此为止第(4)种情况的积分$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$（$p^2-4q<0$，$n>1$）已经解决了．从而真分式的积分问题以及有理函数的积分问题也就解决了．

例 4 求$\int \frac{2x}{x^3-x^2+x-1}dx$.

解 由例 1 和第(3)种类型的部分分式的积分公式，有

$$\int \frac{2x}{x^3-x^2+x-1}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$+\operatorname{arctg}x+C.$$

例 5 求$\int \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx$.

解 由例 3 及递推公式(3)可得：

$$\int \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

$$=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\ln|x|+\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right]+C$$

$$=\ln|x(x^2+1)|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

例 6 求$\int \frac{2x^4-x^3-x+1}{x^3-1}dx$.

解 被积函数是一个假分式，先将它化为多项式与真分式之和：

$$\frac{2x^4-x^3-x+1}{x^3-1}=2x-1+\frac{x}{x^3-1}.$$

而

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)},$$

故有

$$\int\frac{2x^4-x^3-x+1}{x^3-1}\,dx=\int\Big[(2x-1)$$

$$+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}\Big]dx$$

$$=x^2-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]+C$$

$$=x^2-x+\frac{1}{6}\ln\Big[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\Big]$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

以上所讲的，是计算有理函数积分的一般方法，但对某些特殊情形的有理函数的积分，则不需要用这种一般的方法．例如对积分$\int\frac{x^2}{x^3-1}\,dx$，直接用换元积分法计算就要简捷得多：

$$\int\frac{x^2}{x^3-1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-1)}{x^3-1}=\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+C.$$

二　三角函数有理式的积分

三角函数有理式是指由三角函数及常数经过有限次的四则运算所构成的函数．由于$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\sec x$、$\csc x$都可以用$\sin x$和$\cos x$的有理式表示，因此，三角函数有理式都可以化为只含$\sin x$和$\cos x$的有理式．若用符号$R(\sin x,\ \cos x)$表示只对$\sin x$、$\cos x$及常数进行四则运算所得的有理式，则下面的式子：

解 令代换 $u=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，

$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

于是

$$\int\frac{1}{2\sin x-\cos x+3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+3}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{2}{4u^2+4u+2}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C=\mathrm{arc\,tg}(2u+1)+C$$

$$=\mathrm{arc\,tg}\left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

对某些三角函数的有理式的积分，上述代换虽然能解决问题，但却不是最简捷的方法．例如，对于积分$\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$，就可以利用代换$u=\mathrm{tg}x$来处理．

2 $\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$.

若令代换$u=\mathrm{tg}x$，则 $x=\mathrm{arc\,tg}u$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$．于是

$$\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x=\int R(u)\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

上式右边的被积函数，已是 u 的有理函数，积分出来之后，把变量 u 换回 $\mathrm{tg}x$，就得到所求的结果.

例 8 求 $\int\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^3x}{3+\mathrm{tg}^2x}\mathrm{d}x$

解 令 $u=\mathrm{tg}x$，则 $x=\mathrm{arctg}u$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

于是

$$\int\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^3x}{3+\mathrm{tg}^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{u(1+u^2)}{3+u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{u}{u^2+3}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+3)}{u^2+3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u^2+3)+C=\frac{1}{2}\ln(\mathrm{tg}^2x+3)+C$$

除了 $\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$ 这种类型之外，当被积函数中仅含 $\sin^2x$，$\cos^2x$（或 $\sin2x$，$\cos2x$）的有理式时，代换 $u=\mathrm{tg}x$ 也可以使用. 这是因为

$$R(\sin^2x,\ \cos^2x)=R\left(\frac{u^2}{1+u^2},\ \frac{1}{1+u^2}\right),$$

$$R(\sin2x,\ \cos2x)=R\left(\frac{u}{2(1+u^2)},\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right).$$

例 9 求 $\int\frac{1}{5+4\cos2x}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\mathrm{tg}x$，则 $\cos2x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{du}{1+u^2}$.

于是

$$\int \frac{1}{5+4\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5+4\,\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$= \int \frac{1}{u^2+3^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\mathrm{arc\ g}\left(\frac{u}{3}\right)+C$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}x\right)+C.$$

三　两种无理函数的积分

有的无理函数的积分，经过适当的代换之后，可以化为有理函数的积分. 这里，介绍两种无理函数的积分.

1　$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+h}}\right)\mathrm{d}x$　其中 $n \geqslant 2$ 为自然数，a、b、c、h 为实常数，且 $ac \neq 0$.

作代换 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+h}}$，则 $x=\dfrac{ht^n-b}{a-ct^n}$，

$\mathrm{d}x=\dfrac{n(ah-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t$. 于是

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{ht^n-b}{a-ct^n},\ t\right) \cdot \frac{n(ah-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t$$

上式右边的被积函数，已是变量 t 的有理函数，积分出来之后，再把变量 t 换回 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+h}}$，就得到所求的结果. 上面的讨论中，当然包括 $c=0$，$h=1$ 的情形，即包括了 $\int R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$ 的情形.

例10　求 $\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

解 作代换 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$，则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$，

$\mathrm{d}x=-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x&=\int(t^2-1)\cdot t\cdot\left(-\frac{1}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t\\&=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t\\&=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\&=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C.\end{aligned}$$

例11 求 $\displaystyle\int\frac{x+1}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$.

解 作代换 $t=\sqrt[3]{3x+1}$，则 $x=\dfrac{1}{3}(t^3-1)$，$dx=t^2dt$.

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t^2}\left(\frac{t^3-1}{3}+1\right)t^2dt\\&=\frac{1}{3}\int(t^3+2)dt\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}t^4+2t\right)+C\\&=\frac{1}{12}(3x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{1}{3}}+C.\end{aligned}$$

2 $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

计算这种类型的积分，通常都是先对二次三项式ax^2+bx+c进行配方，然后经过三角代换，化为三角函数有理式的积分．下面举例说明．

例12 求$\int\frac{x}{\sqrt{12x-4x^2}}dx$.

解 $\int\frac{x}{\sqrt{12x-4x^2}}dx$

$$=\int\frac{x}{\sqrt{4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]}}d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\xlongequal{t=x-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\int\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{t}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-t^2}}dt+\frac{3}{4}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-t^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{t}{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{3x-x^2}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x-3}{3}+C.$$

例13 求$\int\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$.

解 $\int\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}$

$$=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(x+1)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

例14 求$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

解 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

$$=\int\frac{dx}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$\xlongequal{x+1=\operatorname{tg}t}\int\frac{(\sec^2 t)dt}{1+\sqrt{(\operatorname{tg}t)^2+1}}$$

$$=\int\frac{\sec^2 t}{1+\sec t}dt$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 t+\cos t}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{1+\cos t}\right)dt$$

$$=\int\sec t dt-\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{t}{2}dt$$

$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|-\operatorname{tg}\frac{t}{2}+C$$

由于

$$x+1=\operatorname{tg}t,\quad \sec t=\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{x^2+2x+2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{\sec t-1}{\operatorname{tg}t}=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}.$$

故

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}+C.$$

对于某些含有二次根式的不定积分，还可以用倒数代换来作。

例15 求$\int\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}dx$，$(x>1)$.

解 作倒数代换，设$x=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，于是

$$\int\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}dx\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{3-2t-t^2}}dt$$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{2^2-(t+1)^2}}d(t+1)$$

$$=-\arcsin\frac{t+1}{2}+C$$

$$=-\arcsin\frac{x+1}{2x}+C.$$

例16 求$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$，$(0<x\leqslant a)$.

解 设$x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 于是

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int \frac{\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{t}\right)^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)^4}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}} t\,dt$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\int (a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}} d(a^2t^2-1)$$

$$=-\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$$

$$=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C.$$

一般地说，倒数代换适用于下面两种类型的积分：

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

本章介绍了不定积分的概念以及求不定积分的方法，主要介绍了基本积分法（换元积分法与分部积分法），并对有理函数、三角函数有理式及两种无理函数的积分进行了研究. 对其它的求不定积分的方法，并未涉及，这是因为工程技术上常见到的不定积分，往往可以通过查阅“积分表”而得到结果.

关于不定积分，还有一点需要说明. 对初等函数来说，由于它在定义区间内是连续的. 因此，初等函数的原函数一定存在. 应当指出的是有相当多的初等函数的原函数，却不能用初等函数表示出来. 当初等函数$f(x)$的原函数不是初等函数（即原函数不能用初等函数表示）时，称$\int f(x)dx$“积不出来”. 所谓“积不出来”不是说$f(x)$没有原函数，或原函数不存在. 而是说$f(x)$的原函数不是初等函数. 这样的例子是很多的. 如

$$\int \frac{\sin x}{x}dx、\int \frac{\cos x}{x}dx、\int \frac{1}{\ln x}dx、$$

$$\int e^{-x^2}dx、\int \sin x^2 dx、\int \cos x^2 dx、$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx、\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx,\ (0<k<1)\cdots$$

这些积分，看起来好象很简单，实际上它们都是"积不出来"的.

§4 积分表的使用

不定积分的计算，比起导数的计算要复杂得多，有时还需要一定的技巧. 为了应用方便，人们已经将一些常用的不定积分汇集成表，称为积分表. 本书上册的最后，给出了一个有232个公式的积分表. 如果这个积分表不够用，还可以参考包含更多积分公式的积分表.

下面，简单地介绍一下积分表的使用方法.

(1)本书上册最后所附的积分表，是按被积函数的类型排列的. 排列的顺序是：有理代数函数、根式代数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数、反双曲函数及其它超越函数.

因此，在使用积分表时，首先应当熟悉积分表中各类被积函数的排列顺序. 当求某个不定积分时，可根据这个不定积分的被积函数的类型，在积分表的同类型函数中，查出相应的积分公式来.

例如，求$\int \frac{1}{x^2(x+2)}dx$，由于所求的积分的被积函数是有理函数. 在积分表中查出的相应积分公式为

$$(17)\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x}.$$

由于$a=2$，$b=1$. 从而有

$$\int \frac{1}{x^2(x+2)}dx = -\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|+C.$$

$$(a^2<b^2).$$

这两个不定积分的形式也相同，但是公式（141）只适用于$a^2>b^2$的情形；而公式（142）则适用于$a^2<b^2$的情形.

（Ⅱ）有时所求的不定积分不能在积分表中直接查出，需要经过一次或几次变换，才能化为相应的积分公式的形式．有时，所求的不定积分在积分表中以递推公式的形式表示，这就需要重复使用几次递推公式，才能求得最后的结果.

例如求$\int\frac{1}{x\sqrt{x^4+2x^2+2}}dx$．这个不定积分在积分表中不能直接查出，但考虑到这个不定积分的被积函数含有根式$\sqrt{x^4+2x^2+2}$，若令$u=x^2$，那么根式就化为$\sqrt{u^2+2u+2}$的形式，而在积分表中，可以找到含有这类根式代数函数的积分公式，于是按代换式：$u=x^2$，变换得

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^4+2x^2+2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u\sqrt{u^2+2u+2}}du.$$

在积分表中查出相应的公式(94)为

$$(94)\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{a}}{x}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right),\quad(a>0).$$

其中$X=a+bx+cx^2$．于是得

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^4+2x^2+2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u\sqrt{2+2u+u^2}}du$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+2u+u^2}+\sqrt{2}}{u}+\frac{2}{2\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2+2x^2+x^4}+\sqrt{2}}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

又如$\int\sin^{-5}xdx$，在积分表中有如下的公式

(118) $\int \sin^{2n+1} x dx = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x \, dx$;

(121) $\int \frac{1}{\sin^{2n+1} x} dx = \frac{-\cos x}{2n\sin^{2n} x}$

$$+\frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}.$$

对不定积分$\int \sin^{-5} x \, dx$，只能使用公式（121）而不能使用公式（118），因为在这两个公式中，常数n规定为正整数，应用公式（121）一次，得到

$$\int \sin^{-5} x dx = \frac{-\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int \sin^{-3} x \, dx.$$

对不定积分$\int \sin^{-3} x \, dx$再用一次公式（121）得

$$\int \sin^{-3} x dx = \frac{-\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

再对不定积分$\int \frac{1}{\sin x} dx$使用公式(166) 有

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C.$$

于是，最后得

$$\int \sin^{-5} x \, dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x}$$

$$+\frac{3}{8}\ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C.$$

第六章　定积分

定积分是微积分学中的一个很重要的基本概念．本章先从两个典型实例引进定积分的概念和性质，然后再讨论定积分的计算和应用．

§1　定积分的概念

一　定积分问题的两个引例

1 曲边梯形的面积S　在初等数学中，已经会求三角形、矩形、多边形等平面直边图形的面积。对于平面上曲边图形的面积，除了圆和圆扇形的面积之外，现在还不会计算．

平面曲边图形中，最基本的就是曲边梯形．下面来讨论曲边梯形面积的求法．

在平面直角坐标系xoy中，通常把由三条直线：$x=a$，$x=b$，ox轴及一条连续的曲线$y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$）所围成的图形，称为曲边梯形．把ox轴上的区间$[a,b]$称为曲边梯形的底边，而曲线段$y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）称为曲边梯形的曲边（图6－1）．

由于曲边梯形在底边上各点处的高$f(x)$，在区间$[a,b]$上是变化的，不便于直接求它的面积．注意到$f(x)$是连续的，当x变化不大时，$f(x)$的变化也不大．

当用一组垂直于ox轴的直线，把曲边梯形分成很多窄条形的小曲边梯形时，在这些小曲边梯形内，高度的差别不大，就可以用一点处的高度，近似代替小曲边梯形内各点处的高度，从而用一个小矩形的面积，近似地代替小曲边梯形的面积．只要曲边梯形分割得

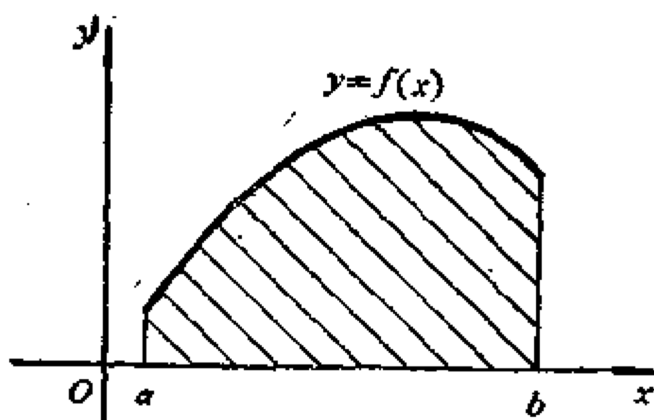


图 6-1

足够细，且所有的小曲边梯形的底部宽度都很小．这时，小矩形的面积与相应的小曲边梯形的面积就越接近．所有的小矩形面积之和，就越逼近原来的大曲边梯形的面积．最后，可以用小矩形面积之和的极限，得到原来的大曲边梯形的面积．现详述如下：

（1） 分割

把区间$[a,b]$任意分割为n个子区间，其分点为

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.

每一个子区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots,n)$.

过各分点作垂直于ox轴的直线，把原来的大曲边梯形分成n个小曲边梯形．分别把这些小曲边梯形的面积记为ΔS_i，$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$$

（2） 以常代变

在每一个小曲边梯形中，以底边长为Δx_i，底边$[x_{i-1}, x_i]$上任意一点ζ_i处的高度$f(\zeta_i)$（$\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$）为高的小矩形的面积；$f(\zeta_i)\Delta x_i$近似代替小曲边梯形的面积ΔS_i，即

$$\Delta S_i\approx f(\zeta_i)\Delta x_i,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

（3） 求和

把 n 个小矩形的面积加起来，就得到大曲边梯形面积 S 的近似值：

$$S \approx f(\zeta_1)\Delta x_1 + f(\zeta_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\zeta_n)\Delta x_n,$$

或

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

（4） 取极限

一般地说，无论 n 多么大，各子区间的宽度 Δx_i 多小，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$ 仍然不等于曲边梯形的面积 S．它只是 n 个小矩形组成的台阶形的面积．

若把区间 $[a,b]$ 的分割无限地变细，使每一个子区间的长度 Δx_i 皆趋于零，则台阶形的面积 $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$ 与曲边梯形的面积 S 的差别就越来越小（图 6－2）．

为了求出 S 的精确值，令 $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i = \lambda$，如果无论对区间 $[a,b]$ 采取何种分法，也不论点 ζ_i 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中如何取法，只要分割无限地变细，当 $\lambda \to 0$ 时，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$ 均存在唯一的极限，则这个极限值就是曲边梯形的面积 S．

即

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

2　变速直线运动的路程 s　设物体作直线运动，速度为 v，求从时刻 $t=a$ 到 $t=b$ 时物体所走过的路程 s．

如果速度 v 不变，物体作匀速直线运动，路程 s 等于速度乘以所用的时间：

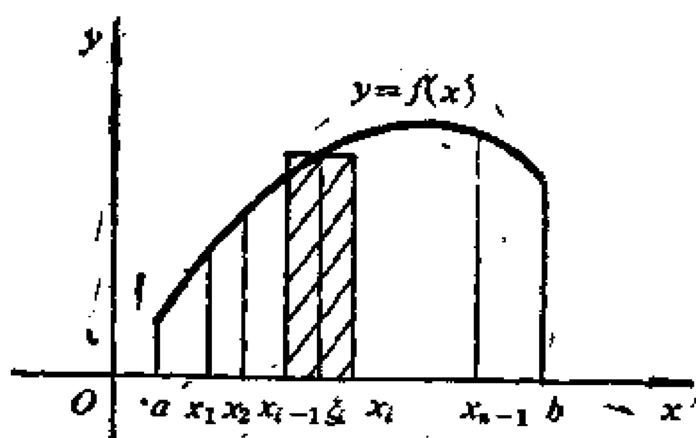


图 6-2

$$s=v(b-a)。$$

现在考虑物体作变速直线运动，其速度 v 随时间 t 而改变。即 $v=v(t)$（$a\leqslant t\leqslant b$）是 t 的连续函数．要求物体在时间间隔$[a,b]$上所走过的路程 s．解决这个问题的办法与上面求曲边梯形的面积相似．

（1） 分割

把区间$[a,b]$任意分割为 n 个子区间，其分点为：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b.$$

每一个子区间$[t_{i-1},\ t_i]$的长度记为$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots,n)$。物体在时间间隔$[a,b]$上所走过的路程 s，等于它在各子区间时间间隔$[t_{i-1},\ t_i]$上所走过的路程Δs_i之和（图 6－3）.

（2） 以常代变

在每一小段时间$[t_{i-1},\ t_i]$上，以任意一时刻ξ_i处的速度$v(\xi_i)$代替这一小段时间上各点处的速度，得到物体在这一小段时间上路程Δs_i的近似值：

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_i,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

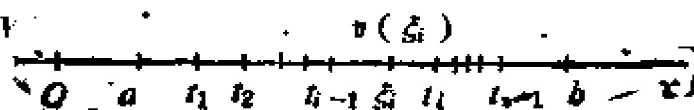


图 6-3

（3） 求和

把上面的 n 个 Δs_i 的近似值加起来，就得到路程 s 的近似值：

$$s \approx v(\zeta_1)\Delta t_1 + v(\zeta_2)\Delta t_2 + \cdots + v(\zeta_{n-1})\Delta t_{n-1} + v(\zeta_n)\Delta t_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v(\zeta_i)\Delta t_i.$$

（4） 取极限

很明显，分割越细，总的误差就越小， 把区间 $[a,b]$ 无限地细分下去。如果无论对 $[a,b]$ 采取何种分法，也不论 ζ_i 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 中如何取法，记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i$，当 $\lambda \to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\zeta_i)\Delta t_i$ 存在唯一的极限，则这个极限值就是路程 s 的精确值．即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\zeta_i)\Delta t_i.$$

二 定积分的定义

前面讨论的两个实际问题，一个属于几何学，一个属于物理学．尽管它们各自的具体内容不同，解决问题的方法却相同．反映到数量上都是求某一个整体量，最后归结到所求的量都是和式的极限，类似这样的实际问题还有很多，我们撇开它们的具体意义，抽象出它们的数学结构．便得到了定积分的定义．

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，任取分点

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，把区间 $[a,b]$ 分为 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$，$(i = 1,2,\cdots,n)$．记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$．在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ζ_i（$\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$）．作乘积 $f(\zeta_i)\Delta x_i$（$i = 1,2,\cdots,n$）及和式：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$，如果无论对区间 $[a,b]$ 采取何种分法，也不论 ζ_i 在

$[x_{i-1}, x_i]$中如何取法，只要当$\lambda \to 0$时，和式$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$总趋于确定的极限值$I$：

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

则称此极限值I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

其中，$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积式，x称为积分变量，a称为积分下限，b称为积分上限，$[a,b]$称为积分区间.

定积分的定义也可以用“ε—δ”语言来叙述.

设有常数I，如果对于任意小的正数ε，总存在着正数δ，使得对于区间$[a,b]$的任何分法，只要$\max\limits_{1 \le i \le n} |\Delta x_i| = \lambda < \delta$，无论$\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$怎样选取，总有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon,$$

则称I是$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分.

定积分$\int_a^b f(x)dx$表示了和式$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$，当$\lambda \to 0$时的极限值. 由定义知道，它是一个确定的数值. 这个数值仅与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关. 如果既不改变被积函数f，又不改变积分区间$[a,b]$，只把积分变量x改写成t或者u，这时此和式极限I的值也不会改变. 即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

这说明，定积分的值只与被积函数和积分区间有关，而与积分变量的记法无关.

如果定积分$\int_a^b f(x)dx$存在，则称函数$f(x)$在$[a,b]$上可积. 由

定积分的定义可知：一个在$[a,b]$上可积的函数$f(x)$，必定是$[a,b]$上的有界函数，即函数有界是函数可积的必要条件.

至于函数$f(x)$在$[a,b]$上满足什么条件时一定可积，我们不作进一步讨论，只给出下面三个充分条件：

（1）若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

（2）若$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

（3）若$f(x)$在$[a,b]$上是单调有界的函数，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

上面三类函数可积的充分条件的证明，要用到实数的完备性和闭区间上连续函数的性质，比较复杂，故略去。

例1 证明狄利赫勒（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

在任意区间$[a,b]$上都是不可积的.

证明 用分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$把区间$[a,b]$分为$n$个子区间$[x_{i-1}, x_i]$，$(i=1, 2, \cdots, n)$. 在每一个子区间$[x_{i-1},x_i]$上，取一点$\zeta_i$：

若ζ_i为有理数，则$D(\zeta_i)=1$（$i=1,2,\cdots,n$）. 对应的和式为

$$\sum_{i=1}^{n} D(\zeta_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a,$$

可知其极限仍为$b-a$.

如果ζ_i为无理数，则$D(\zeta_i)=0$（$i=1,2,\cdots,n$）. 对应的和式为

$$\sum_{i=1}^{n} D(\zeta_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0.$$

这时，其极限为零.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=S.$$

（图 6－4 ）.

当$f(x)\leqslant 0$时，由曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$与ox轴所围成的曲边梯形$CDBA$位于ox轴的下方（图 6－5 ）. 此时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示了曲边梯形面积的负值，即

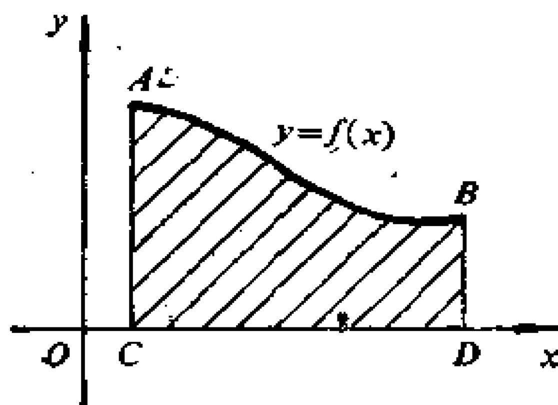


图 6-4

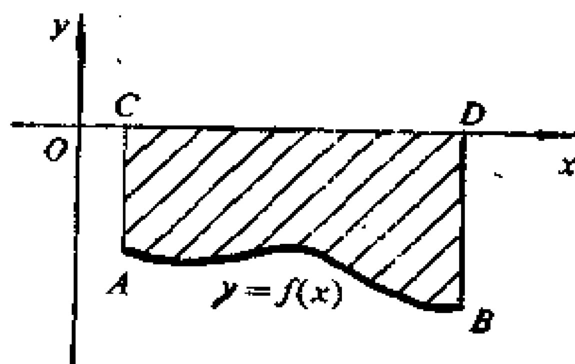


图 6-5

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-S$$

当$f(x)$在(a,b)上有时为正，有时为负时，则曲线$y=f(x)$有时在ox轴的上方，有时在ox轴的下方. 若对在ox轴上方的图形的面积赋以正号；在ox轴下方的图形的面积赋以负号. 这时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的几何意义为介于ox轴、曲线$y=f(x)$及两条直线$x=a$，$x=b$之间的各部分的图形面积的代数和（图 6－6 ），如在图 6－6 中，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=S_1-S_2+S_3-S_4+S_5.$$

例2 由定积分的几何意义求下列定积分的值：

（1）$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$，（2）$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

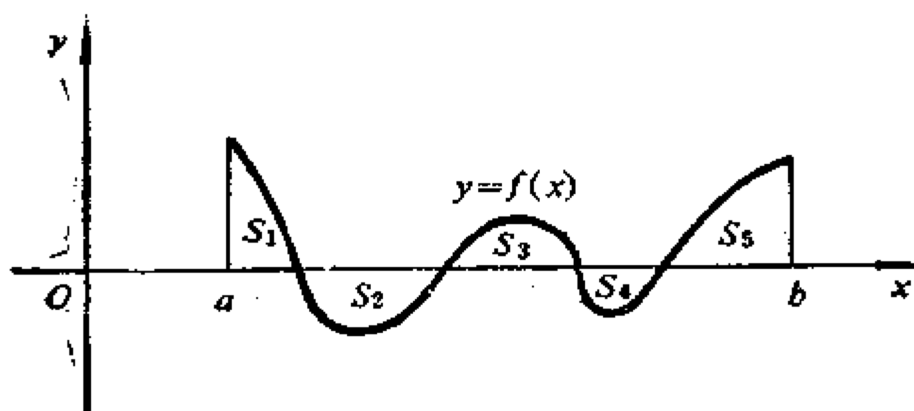


图 6-6

解 （1） 定积分$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$的几何意义代表了图6-7所示的直角三角形的面积，此直角三角形的直角底边长为1，另一条直角边长为2，故

$$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1.$$

（2） 定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$的几何意义代表了图6-8所示的半径为1的四分之一圆的面积. 故

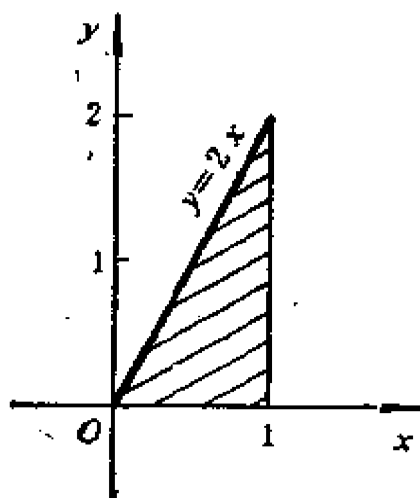


图 6-7

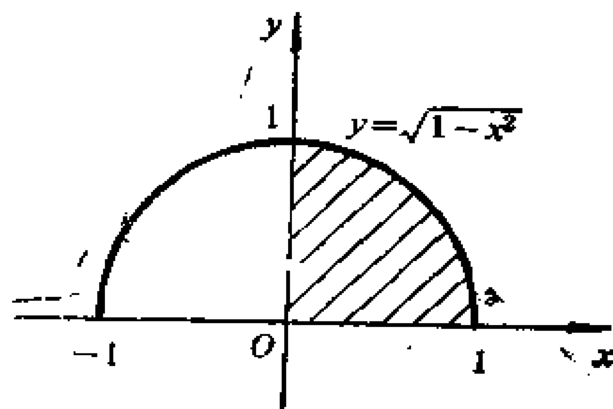


图 6-8

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

§2 定积分的性质

为了进一步研究定积分的理论、计算和应用，在这一节中先讨论定积分的性质和中值定理.

一 定积分的性质

性质1 若函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上可积，则函数$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$上也可积，且有

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证明 由定积分的定义有

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\zeta_i)\pm g(\zeta_i)]\Delta x_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\zeta_i)\Delta x_i \pm g(\zeta_i)\Delta x_i]$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证毕

性质2 若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，k为常数。则函数$kf(x)$在$[a,b]$上也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

证明 由定积分的定义，有

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

$$= k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证毕

性质 2 说明了被积函数中的常数因子，可以提到积分号外面来。性质 1 与性质 2 可以合并写为：

$$\int_a^b [kf(x) \pm hg(x)]\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)dx \pm h\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

（其中k、h为常数）.

性质 3 设函数$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积，常数a、b、$c\in[\alpha,\beta]$，则无论a、b、c的相对位置如何，均有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 （1）若$a<c<b$，这时，点c把区间$[a,b]$分为$[a,c]$与$[c,b]$两个区间．因为函数$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积，所以它在$[a,b]$上也可积．故可取c是一个分点，于是有

$$\sum_{[a,b]} f(\zeta_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]}{}' f(\zeta_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]}{}''(\zeta_i)\Delta x_i$$

其中$\sum\limits_{[a,b]}$、$\sum\limits_{[a,c]}{}'$、$\sum\limits_{[c,b]}{}''$分别表示在相应的区间上分割求和。

令$\lambda=\max|\Delta x_i|\to 0$，取极限有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这个性质在$a<c<b$时，从几何意义看，十分明显（图6-9）。

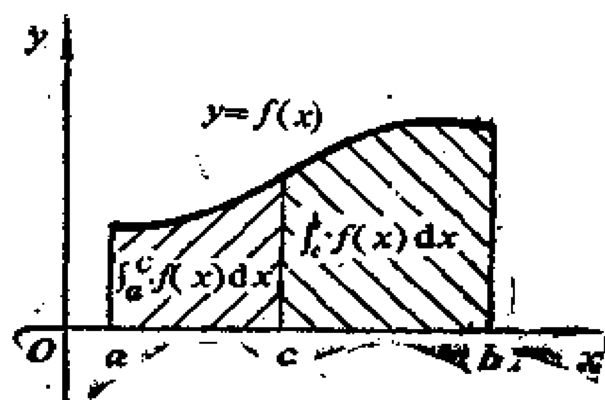


图 6-9

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 代表大曲边梯形的面积，是$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$代表的两个小曲边梯形面积之和.

(2)若 $a<b<c$，由(1)知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对于 a、b、c 的其他位置情况，如：
$b<a<c$，$b<c<a$，$c<a<b$，$c<b<a$ 等，均可类似证明.

总之，无论 a、b、c 的相对位置如何，性质 3 总是成立的. 它表明定积分对积分区间具有可加性.

性质 4 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ $(a<b)$ 上可积，且有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对于区间$[a,b]$的任意分割，由于$f(x) \leqslant g(x)$，有$f(\zeta_i) \leqslant g(\zeta_i)$（$i=1,2,\cdots,n$）.

即

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\zeta_i)\Delta x_i$$

令$\lambda \to 0$，取极限得:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\quad (a<b).$$

证毕

在性质 4 中，当$a>b$时，不等号要反向.

推论 1 若$f(x) \geqslant 0$是$[a,b]$上的可积函数，则

当$a<b$时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$,

当$a>b$时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

推论 2 若$f(x) \leqslant 0$是$[a,b]$上的可积函数，则

当$a<b$时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$,

当$a>b$时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

性质 5 若$f(x)$在$[a,b]$ $(a<b)$上可积，则有

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 由绝对值的性质知

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,\quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

由性质 4，有

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad (a<b).$$

证毕

性质6 设可积函数$f(x)$在$[a,b]$($a<b$)上的最大值为M，最小值为m，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

证明 因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，$x \in [a,\ b]$，

所以 $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$

由性质 2，得

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx.$$

故

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \quad (a<b).$$

证毕

性质7 改变可积函数在有限个点处的函数值，不影响定积分的值（证明略）.

二 定积分的中值定理

1 积分第一中值定理

定理1 若函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使下面的等式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

证明 因为$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，所以存在最大值M和最小值m，使

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b].$$

由于$g(x)$在$[a,b]$上不变号，不妨设$g(x) \geqslant 0$，故有

$$mg(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a, b].$$

积分有

$$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

由推论1知，当$g(x) \geqslant 0$（$a \leqslant x \leqslant b$）时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

（1）若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$，则不等式（2）给出

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

这时，对任意的$\xi \in [a,b]$，等式（1）均成立.

（2）若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$，则不等式（2）变为

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M,$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，连续函数$f(x)$在$[a,b]$上至少存在一点号ξ，使

$$f(\zeta)=\frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},\ \zeta\in[a,\ b].$$

即

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=f(\zeta)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\quad \zeta\in[a,\ b].$$

对$g(x)<0$的情形，同理可证.

证毕

2　积分中值定理（积分平均值定理）

定理2　若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\zeta\in[a,b]$，使下面的等式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\zeta)(b-a),\ \zeta\in[a,\ b].$$

证明　在积分第一中值定理中，令$g(x)=1$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\zeta)\int_a^b\mathrm{d}x=f(\zeta)(b-a),\quad \zeta\in[a,\ b].$$

证毕

由此可见，积分中值定理是积分第一中值定理的特殊情况，而积分第一中值定理则是积分中值定理的推广.

应当说明的是，在积分中值定理中给出点ζ是在闭区间$[a,b]$上取得的．更进一步的讨论，可以断定：点ζ的值可以在开区间(a,b)内取得．也就是说，积分中值定理也可以叙述为：

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\zeta\in(a,b)$，使下面的等式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\zeta)(b-a),\quad \zeta\in(a,\ b)$$

证明过程从略.

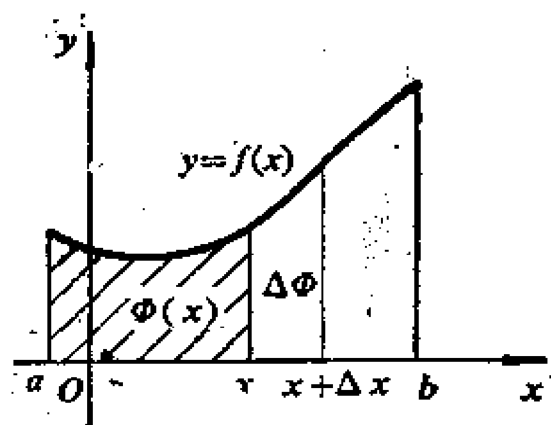


图 6-10

证明 当x有增量Δx($x+\Delta x\in[a,b]$)，函数$\Phi(x)$在$x+\Delta x$处的值$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$. 则函数$\Phi(x)$的增量$\Delta\Phi$可表示为（见图 6-10）

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(\zeta)\cdot\Delta x,\ (\zeta\text{介于}x\text{与}x+\Delta x\text{之间})$$

故

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\zeta).$$

取极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\zeta),$$

当$\Delta x\to 0$时，$\zeta\to x$，由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，上式右端的极限存在且为$f(x)$，故

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(x).$$

证毕

定理 1 表明，如果$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是$f(x)$的一个原函数。

在第五章第一节中，曾经给出了原函数的存在定理，当时并未证明. 定理 1 实际上是给出了原函数存在性的证明. 并且指出连续函数$f(x)$存在一个原函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 因此又有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.$$

这个等式表明，$f(x)$的不定积分，或者$f(x)$的任意一个原函数都可以用变上限的定积分来表示.

由定理 1，还可以得到：

$$\mathrm{d}\Phi(x)=\mathrm{d}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$中的$f(x)\mathrm{d}x$与不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$中的被积式一样，表示了$f(x)$的原函数的微分.

二　牛顿—莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式

定理2　设$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证明　由定理 1 知$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的一个原函数，又知$F(x)$也是$f(x)$的一个原函数，因为两个原函数之差是一个常数。所以

$$F(x)-\Phi(x)=C,$$

即

$$F(x)=\Phi(x)+C$$

于是

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=\Phi(b)-\Phi(a)\\&=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

把积分变量t换为x，便是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证毕

定理 2 给出的公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. 称为牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式，它是微积分学中的基本公式，利用它，连续函数的定积分的计算问题就转化为求原函数的增量问题.

牛顿-莱布尼兹公式又简称为牛-莱公式. 原函数$F(x)$在$[a,b]$上的增量$F(b)-F(a)$,通常可以用记号$F(x)\Big|_a^b$表示. 这样，牛-莱公式又可以记为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b.$$

例 1 求$\int_1^2 5x^4\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^2 5x^4\mathrm{d}x=x^5\Big|_1^2=(2^5)-1^5=31.$

例 2 求$\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

例 3 求$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$.

解 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=-[\cos\pi-\cos(-\pi)]$

$$=0.$$

例 4 求$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$.

解 $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}\,dx$

$$=\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}|\cos x|\,dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=2\sqrt{2}.$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 若 x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2, & 若 x>1,\end{cases}$ 求$\int_{0}^{2}f(x)dx$.

解 因为$f(x)$在$[0,2]$上除$x=1$间断外，在其余的点处均连续，所以$f(x)$在$[0,2]$上可积，由本章第二节的性质 7 知此定积分与函数$f(x)$在点$x=1$一点处的值无关，故可分段计算积分.

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$

$$=\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1+\frac{1}{6}x^3\Big|_1^2$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{7}{6}$$

$$=\frac{8}{3}.$$

例6 设$f(x)$是连续函数，$u(x)$、$v(x)$皆可微分，证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=v'(x)f[v(x)]-u'(x)f[u(x)].$$

证明 因为

$$\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=\int_{u(x)}^{a}f(t)\mathrm{d}t+\int_a^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\int_a^{v}f(t)\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{u}f(t)\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$=v'(x)f[v(x)]-u'(x)f[u(x)].$$

证毕

§ 4 定积分的计算方法

牛顿-莱布尼兹公式给出了计算连续函数定积分的方法. 只要能求出被积函数的原函数，然后分别代入上、下限并计算出原函数的增量就行了.

有方法计算定积分是一个方面，计算的方法是否简单又是一个方面. 在这一节中，将会看到利用定积分的换元积分法及分部积分法，不但可以简化计算，而且对于有些不易直接求出原函数的定积分，也能计算出它们的积分值.

一 定积分的换元公式

定理1 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续的导数$\varphi'(t)$，当t在$[\alpha, \beta]$上变化时，$\varphi(t)$的值在$[a, b]$上变化，并且$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

证明 因为$f(x)$，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$均连续，所以(4.1)式两边的定积分都存在.

设$F(x)$是$f(x)$的原函数，由复合函数的微分法知$F[\varphi(t)]$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数. 根据牛顿-莱布尼兹公式有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

及

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=F(b)-F(a),$$

故

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

证毕

定理1中的(4.1)式，就是定积分的换元公式。在应用这个公式计算定积分时，令代换：$x=\varphi(t)$，把原来的定积分$\int_a^b f(x)dx$换成了关于新变量t的定积分$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$，其积分限则相应地由$[a, b]$变为$[\alpha, \beta]$. 并且，求出了被积函数$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数$F[\varphi(t)]$之后，直接代入新变量$t$的上、下限相减就行了，而不必象不定积分那样，再把变量t还原为变量x.

在不定积分部分曾经介绍了两类换元积分法. 对于不定积分的第一类换元积分法，相应地在定积分的换元公式(4.1)中，是由右边到左边使用公式，而不定积分的第二类换元积分法，相应地在定积分的换元公式(4.1)中，是由左边到右边使用公式. 正因为如此，在定积分中就不再区分第一类换元积分与第二类换元积分.

例1 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^3 x\sin x\,dx$.

解 令$u=\cos x$，当$x=0$时，$u=1$；

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$u=0$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^3 x\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^3 x\,d(\cos x)$$

$$\xlongequal{u=\cos x}-\int_1^0 4u^3\,du$$

$$=\int_0^1 4u^3\,du$$

$$=u^4\Big|_0^1=1.$$

例2 求$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$.

解 设$u=\sqrt{x}$，当$1\leqslant x\leqslant 4$时，$1\leqslant u\leqslant 2$．且$x=1$时，$u=1$；$x=4$时，$u=2$．于是

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} \xlongequal{u=\sqrt{x}} \int_1^2 \frac{2u\mathrm{d}u}{u^2+u} = 2\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u+1}$$

$$=2\ln(u+1)\Big|_1^2$$

$$=2\ln\frac{3}{2}.$$

例3 求$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，$(a>0)$.

解 设$x=a\mathrm{tg}t$，$\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$，则

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{x=a\mathrm{tg}t} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{(a^2+a^2\mathrm{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}(\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}.$$

例4 设$f(x)$在$[-a,a]$（$a>0$）上连续，证明，

（1）若$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2)若$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 若$f(x)$在$[-a, a]$上为奇函数，则有

$f(-x)=-f(x)$，即$f(-x)+f(x)=0$，$x\in[-a, a]$. 于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

$$=0.$$

(2) 若$f(x)$在$[-a, a]$上为偶函数，则有$f(-x)=f(x)$，即$f(-x)+f(x)=2f(x)$，$x\in[-a, a]$. 于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x.$$

移项有

$$2\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$ 证毕

对定积分$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$，被积函数可以看成$xf(\sin x)$。这里，$f(\sin x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}=\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}$由上面证得的等式，可得

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}(\mathrm{arctg}(\cos x))\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{4}.$$

例6 证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，($n$为正整数)；

(2) $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，($n$为正整数)。

证明 （1）令代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx \xlongequal[]{x=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$$

（2）$\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx.$

而

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx \xlongequal[]{x=\pi-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n(\pi-t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(\pi-t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,$$

故

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$$

证毕

二　定积分的分部积分公式

定理2　设函数$u(x)$、$v(x)$在$[a, b]$上具有连续的导数，则有

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x). \qquad (4.2)$$

证明　由于$u(x)$、$v(x)$在$[a, b]$上具有连续的导数，故有

$$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$$

$$u(x)\mathrm{d}v(x)=\mathrm{d}[u(x)v(x)]-v(x)\mathrm{d}u(x)$$

等式两边在$[a, b]$上积分，有

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=\int_a^b \mathrm{d}[u(x)v(x)]-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

$$=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

证毕

公式(4.2)称为定积分的分部积分公式。这个公式说明，用分部积分公式计算定积分时，不必把原函数全部求出来之后，再代入上、下限，而是先把上、下限代入$[u(x)v(x)]$中求出增量，并计算出定积分$\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$，再求出两者之差。

例7　求$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}(e^x)$

$$=(xe^x)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$

$$=(e-0)-e^x\Big|_0^1$$

$$=e-(e-1)$$

$$=1.$$

例 8 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，（$n$为正整数）。

解 当$n=1$时，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)$$
$$=1.$$

当$n>1$时，令$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，则

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$
$$=(-\cos x\sin^{n-1}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(\sin^{n-1}x)$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$=(n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right]$$
$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

即

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

这个等式就是关于I_n的递推公式，它将I_n的计算化为I_{n-2}的计算。依次作下去，即可求得结果。

当n为奇数时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot I_{n-4}$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2}{n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1}$$

$$=\frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

当 n 为偶数时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

综上所述，有如下的结果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & (n\text{ 为正奇数}),\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & (n\text{ 为正偶数}).\end{cases}$$

I_n的几个常用的结果为：

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1,$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\ \mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi,$$

…….

§5 定积分的近似计算法

牛顿-莱布尼兹公式提供了用原函数的增量计算定积分的方法.定积分的换元积分与分部积分公式的应用，使我们能有效地计算出许多定积分.

但是在不少的情况下，例如：对原函数不能用初等函数表示的定积分、对被积函数是由图象或者表格形式（而不是由公式形式）给出的定积分，前面介绍的方法就无能为力了. 在实际问题中，这样的情形是经常会遇到的. 因此，有必要对定积分的近似计算进行研究. 本节仅介绍三种最简单的近似计算法——矩形法、梯形法及抛物线法.

一 矩形法

无论定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$在实际问题中的意义如何，在数值上它都等于由曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$与x轴所围成的曲边梯形的面积（不妨先假定$f(x)\geqslant 0$. 但在本节中所导出的公

式，在没有此假定的情况下，仍然成立）．因此，定积分的近似计算法可以看作是曲边梯形面积的近似计算法．

矩形法是将大的曲边梯形分成若干个小曲边梯形，每个小曲边梯形都用一个小矩形去代替．然后再把所有的小矩形的面积之和作为大曲边梯形面积的近似值．如图6-11所示，具体的作法如下．

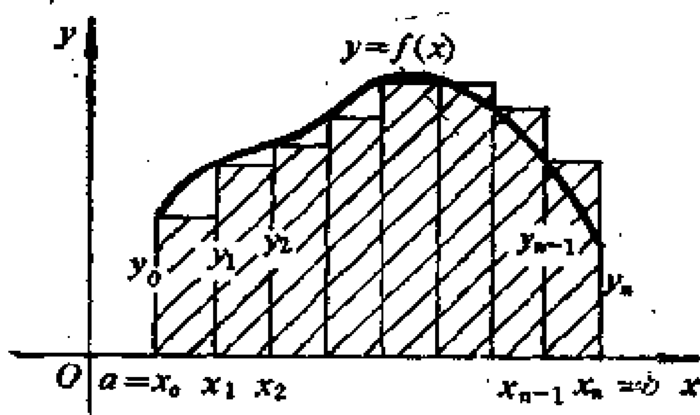


图 6-11

（1）把区间$[a, b]$分为n个长度相同的小区间，其分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

则每一个小区间的长度为

$$x_i-x_{i-1}=\Delta x=\frac{b-a}{n},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

（2）过各分点作垂直于x轴的直线，把原来的大曲边梯形分成n个底边长度相同的小曲边梯形．对应于各分点：x_0，x_1，$\cdots$，x_{n-1}，x_n的函数值分别记为y_0，y_1，$\cdots$，y_{n-1}，y_n．

（3）若以每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$的左端点x_{i-1}（$i=1$，2，$\cdots$，n）处的函数值y_{i-1}为高，以Δx为底的小矩形的面积代替小曲边梯形的面积，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx y_0\Delta x+y_1\Delta x+\cdots+y_{n-1}\Delta x$$

$$=\Delta x(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}) \tag{5.1}$$

公式（5.1）称为矩形法的左端点公式.

若以每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$的右端点x_i（$i=1, 2, \cdots, n$）处的函数值y_i为高，以Δx为底的小矩形的面积代替小曲边梯形的面积，就得到矩形法的右端点公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx y_1\Delta x+y_2\Delta x+\cdots+y_n\Delta x$$

$$=\Delta x(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \tag{5.2}$$

矩形法的左端点公式（5.1）与右端点公式（5.2）均叫做矩形法公式.

二　梯形法

对矩形法略加改进，就得到梯形法. 如图6-12所示. 用直线段M_0M_1，M_1M_2，…，$M_{n-1}M_n$代替函数$y=f(x)$所表示的曲

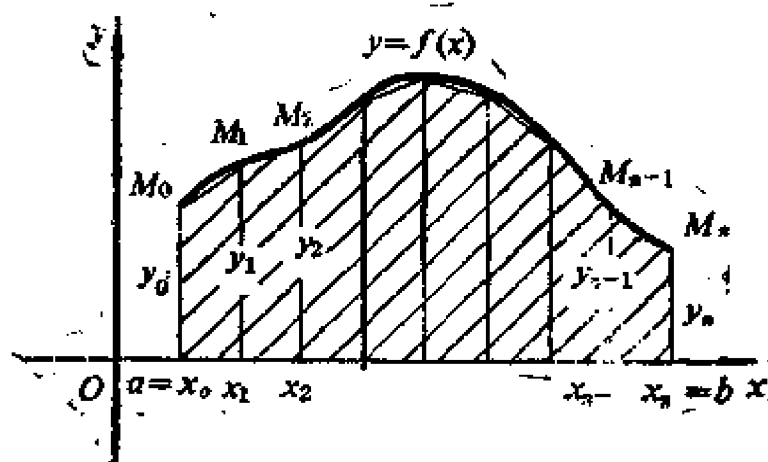


图 6-12

线段，把每个小曲边梯形的面积用一个小梯形的面积来代替. 就得到梯形法的公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$$

$$=\Delta x\left[\frac{y_0+y_n}{2}+(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})\right]$$

$$=\frac{b-a}{2n}\{(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})\} \tag{5.3}$$

三 抛物线法

无论是矩形法或是梯形法，都是用小的直线段代替曲线段，得到求定积分的近似公式．为了得到更好的定积分近似计算公式，可以用许多小抛物线段来代替已知的小曲线段，用小抛物线梯形的面积代替小曲边梯形的面积，这就是抛物线法．

在推导抛物线法公式以前，先介绍一个辅助公式．

例 1 设有一条抛物线，其对称轴平行于 y 轴，且通过三点：$M_0(x_0, y_0)$、$M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$，其中 $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$．则由此抛物线及直线 $x=x_0$，$x=x_2$ 与 ox 轴所围的图形的面积(图 6-13)为

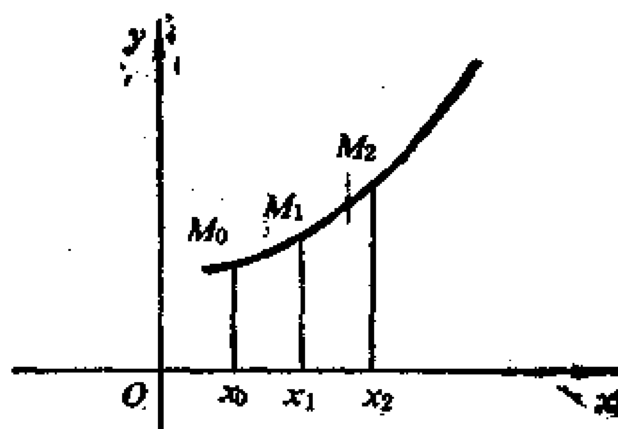


图 6-13

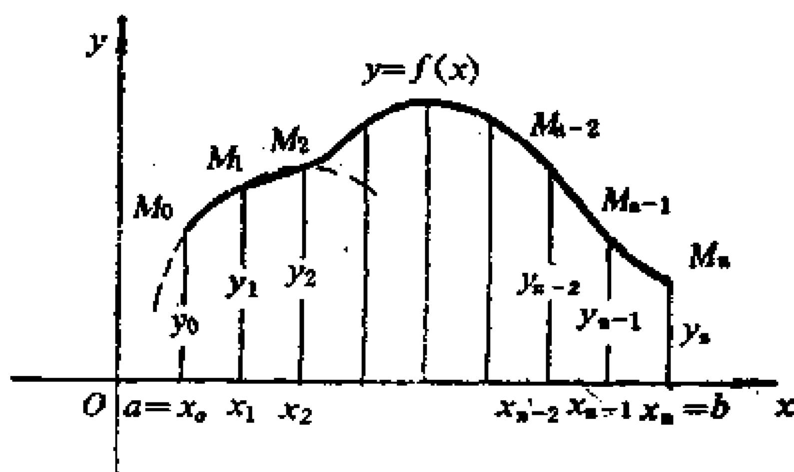


图 6-14

抛物线梯形的面积为

$$\frac{x_2-x_0}{6}(y_0+4y_1+y_2)=\frac{1}{3}\Delta x(y_0+4y_1+y_2).$$

这里， $\Delta x=\dfrac{x_2-x_0}{2}=x_2-x_1=x_1-x_0=\dfrac{b-a}{n}$.

同理，用过三点M_2、M_3、M_4的抛物线段代替曲线$y=f(x)$在M_2M_4间的弧段，在$[x_2,\ x_4]$上的小抛物线梯形面积为

$$\frac{1}{3}\Delta x(y_2+4y_3+y_4).$$

依次推下去，最后用过三点M_{n-2}、M_{n-1}、M_n的抛物线段代替曲线$y=f(x)$在$M_{n-2}M_n$间的弧段，在$[x_{n-2},\ x_n]$上的小抛物线梯形面积为

$$\frac{1}{3}\Delta x(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n).$$

把以上所列的各个小抛物线梯形面积加起来，就得到定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的近似值：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{3}\Delta x(y_0+4y_1+y_2)$$

$$+\frac{1}{3}\Delta x(y_2+4y_3+y_4)+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}\Delta x(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

$$=\frac{1}{3}\Delta x[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots$$

$$+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)]$$

$$=\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})],$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots$$

$$+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})]. \qquad (5.4)$$

这就是抛物线法公式，也叫做辛普生（simpson）公式.

上面所讲的三种定积分近似计算公式的误差估计可以表示如下（这里略去其推导过程）.

设$f(x)$在$[a, b]$上具有连续的k阶导数．且$N_k=\max|f^{(k)}(x)|$，（$k=1, 2, 4$），r_n表示使用近似公式计算定积分的误差．则

矩形法的绝对误差 $|r_n|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}N_1$；

梯形法的绝对误差 $|r_n|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}N_2$；

抛物线法的绝对误差 $|r_n|\leqslant\frac{(b-a)^5}{180n^4}N_4$.

这就说明了在等分数n相同的情况下，梯形法公式的精确度比

矩形法公式高，而抛物线法公式的精确度又比梯形法公式高。这就是抛物线法经常被采用的原因.

例2 用矩形法、梯形法及抛物线法，取 $n=4$，计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 的近似值。

解 把区间〔0，1〕4等分.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i	1	0.9412	0.8	0.64	0.5

（1）用矩形法（左端点公式）

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3)$$

$$=\frac{1}{4}(1+0.9412+0.8+0.64)$$

$$=\frac{1}{4}\times 3.3812$$

$$=0.8453.$$

（2）用梯形法

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{8}[(y_0+y_4)+2(y_1+y_2+y_3)]$$

$$=\frac{1}{8}[(1+0.5)+2(0.9412+0.8+0.64)]$$

$$=\frac{1}{8}\times 6.2624$$

$$=0.7828.$$

（3）用抛物线法

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]$$

$$=\frac{1}{12}[(1+0.5)+4(0.9412+0.64)+1.6]$$

$$=\frac{1}{12}\times 9.4248$$

$$=0.7854.$$

而此积分的精确值为

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$$=0.785398\cdots\cdots.$$

由此可以看出梯形法比矩形法精确度要高，而抛物线法则更胜过梯形法一筹.

例3 用抛物线法，取 $n=10$. 计算定积分$\int_0^1 e^{-x^2}dx$的近似值.

解 把区间[0，1]10等分. 列表如下：

x_i	$y_i=e^{-x_i^2}$		
$x_0=0.0$	$y_0=1.0000$		
$x_1=0.1$		$y_1=0.9900$	
$x_2=0.2$			$y_2=0.9608$
$x_3=0.3$		$y_3=0.9139$	
$x_4=0.4$			$y_4=0.8521$
$x_5=0.5$		$y_5=0.7788$	
$x_6=0.6$			$y_6=0.6977$
$x_7=0.7$		$y_7=0.6126$	
$x_8=0.8$			$y_8=0.5273$
$x_9=0.9$		$y_9=0.4449$	
$x_{10}=1.0$	$y_{10}=0.3679$		
相 加	1.3679	3.7402	3.0379

由抛物线法的公式有

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+\cdots+y_9)$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{30}[1.3679+4\times 3.7402+2\times 3.0379]$$

$$=\frac{1}{30}\times 22.4045$$

$$=0.7468.$$

例4 为了求得宽度为20m的某条河流的横断面积S，在河流的横断面上每隔2米测得河的深度如下表：（单位为m）

x(离岸距离)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y(河深)	0	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0

试用抛物线法公式计算出河的横断面积S.

解 按抛物线法公式有

$$S\approx\frac{20}{30}(0+4(0.5+1.1+1.7+1.5+0.6)$$

$$+2(0.9+1.3+2.1+1.1)]$$

$$=\frac{2}{3}[0+21.6+10.8]$$

$$=\frac{2}{3}\times 32.4$$

$$=21.6(m^2).$$

§6 广义积分初步与Γ函数

前面在讨论定积分的概念时，总是假定积分区间是有限的，而被积函数必须是连续的或有界的（但间断点的个数是有限的）．在实际问题中，会遇到积分区间是无穷区间及被积函数为无界函数的积分．这就需要对定积分的概念加以推广．这种推广后的积分叫做广义积分，而前面讲过的定积分则称为常义积分．

一　积分区间为无穷的广义积分

定义1　设函数$f(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续，则对任意的$b>a$，若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a, +\infty)$上的广义积分，记为$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当定义1中的（1）式极限存在时，称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$存在或收敛，若（1）式中的极限不存在，则称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$不存在或发散．

类似地，还可以定义广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad (b>a).$$

至于广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的含义是：对任意指定的常数$c$，若$\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$都存在时，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

不难证明，这样定义的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的值是不依赖于点 c 的选取的. 应当指出，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$存在或收敛是要求右端两个广义积分$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同时收敛. 如果这两个广义积分均发散，或者其中某一个广义积分发散，则广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$必定发散.

为了计算方便，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$常写成下面的式子：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

这里，选取了$c=0$，是不会影响计算结果的.

例1 求$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{b}\right)$

$$= \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b) = \frac{\pi}{2}.$$

广义积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$的几何意义是：位于曲线$y=\frac{1}{1+x^2}$之下，$ox$轴之上，$oy$轴之右，向右延伸至无穷远处的平面图形的面积. 如图6-15所示.

设$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数，按照牛顿-莱布尼兹公式，有

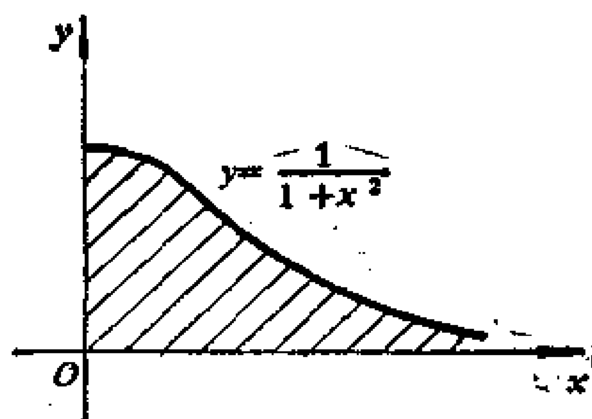


图 6-15

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

若$\lim\limits_{b\to+\infty}F(b)$存在，并记此极限为$F(+\infty)$，则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a).$$

同理，若$\lim\limits_{a\to-\infty}F(a)$存在，并记此极限为$F(-\infty)$，则有

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(-\infty).$$

如果$F(+\infty)$，$F(-\infty)$均存在，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例2 求$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\sin\omega x\mathrm{d}x$，$(k>0)$.

解 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\sin\omega x\mathrm{d}x=\left.\frac{(-k\sin\omega x-\omega\cos\omega x)\mathrm{e}^{-kx}}{k^2+\omega^2}\right|_0^{+\infty}$

$$=\frac{\omega}{k^2+\omega^2}.$$

$\left(\text{因为} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-k\sin\omega x-\omega\cos\omega x)e^{-kx}}{k^2+\omega^2}=0\right)$.

例3 设$a>0$，证明广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$，当$p>1$时收敛；当$p\leqslant 1$时发散.

证明 当$p=1$时，

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$$

当$p\neq 1$时，

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{a^{p-1}}\right), & p>1;\end{cases}$$

因此，当$p>1$时，广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$，收敛，

其值为 $\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{a^{p-1}}\right)$；当$p\leqslant 1$时，广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散.

例4 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

解
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx&=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0}+\operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty}\\&=\pi.\end{aligned}$$

例5 判定广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$的敛散性.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时，称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在或收敛。若（2）式中极限不存在，则称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$不存在或发散。

同样地，如果$f(x)$在$[a,\ b)$上连续，在点b的左邻域内无界，则对任意的$\eta>0$，$f(x)$在区间$[a,\ b-\eta]$上可积，若极限

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称广义积分，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x.$$

设$f(x)$在$[a,\ b]$上除点c（$a<c<b$）外连续，在点c的邻域内无界（$f(x)$在c点也允许无定义）如果广义积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，且有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例6　求$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解　被积函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$在点$x=a$点的左邻域内无界，于是有

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\lim_{\eta\to0^+}\int_0^{a-\eta}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\lim_{\eta\to0^+}\left(\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\eta}\right)$$

$$=\lim_{\eta\to0^+}\arcsin\frac{a-\eta}{a}=\frac{\pi}{2}.$$

广义积分$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$的几何意义是：位于曲线

$y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$之下，$ox$轴之上，直线$x=0$与$x=a$之间的平面图形的面积，如图6-16所示.

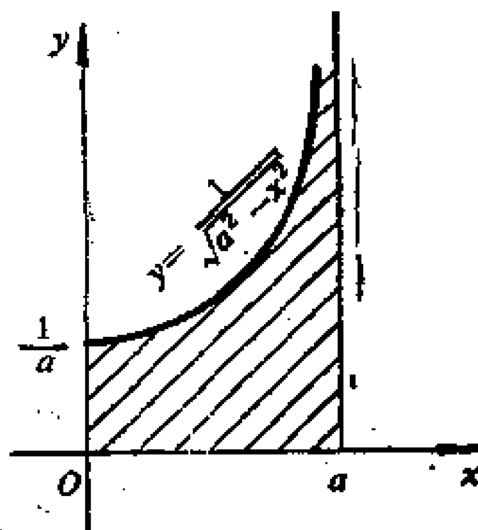


图 6-16

例 7 证明广义积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$当$p<1$时收敛；当$p\geqslant1$时发散.

证明 当$p=1$时，

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\int_0^1\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right)=+\infty.$$

当$p\neq1$时，

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^p}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\varepsilon^1\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-p}, & p<1;\\ +\infty, & p>1.\end{cases}$$

因此，当$p<1$时，$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$收敛；当$p\geqslant1$时，$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$发

散.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕

无界函数的广义积分，有的书上又称为瑕积分. 瑕积分与常义积分的区别应当引起注意. 在计算定积分的时候，应当先审查一下被积函数$f(x)$，以免出现错误.

例如$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$是一个广义积分（瑕积分）. 它在$x=0$处有一个无穷型间断点，而$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$及$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$都发散，故知$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$也发散，如果不审查被积函数，误把被积函数$f(x)=\frac{1}{x^2}$当作〔−1，1〕上的连续函数，忽略$x=0$是被积函数的无穷间断点，直接用牛顿-莱布尼兹公式，就会得到下面的错误结果：

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-2.$$

当处理的广义积分的积分区间为无穷，同时被积函数又无界时，可以把它拆成几个积分，使每一个积分只是单纯的区间无穷或单纯的被积函数无界的广义积分，然后再分别处理这些积分.

三　Γ函数

广义积分

$$\int_{0}^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx \tag{3}$$

是一个常见的积分，当$p>0$时，此积分收敛（证略）.

对$p>0$的不同的p值，积分$\int_{0}^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$有不同的数值，于是有下面的定义.

定义3　当$p>0$时，广义积分$\int_{0}^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$是$p$的函数，记为$\Gamma(p)$，即

$$\Gamma(p)=\int_{0}^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx,\quad(p>0).$$

称为Γ函数.

这里仅介绍Γ函数的一些基本性质：

(1) $\Gamma(1)=1$；

(2) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$，$p>0$；

(3) $\Gamma(n+1)=n!$（n为自然数）.

证明 由Γ函数的定义，有

$$(1)\quad \Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1;$$

$$(2)\quad \Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^{p+1-1}e^{-x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x^p d(-e^{-x})$$

$$=-x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

$$=p\Gamma(p);$$

(3) 若n为自然数，由性质(2)得

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1)$$

$$=n!.$$

证毕

在 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$中，令$x=t^2$，$(t>0)$.

则有

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^{+\infty} t^{2p-2}e^{-t^2}\cdot 2tdt$$

$$=2\int_0^{+\infty} t^{2p-1}e^{-t^2}dt$$

$$2\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}dx.$$

这就是Γ函数的另一种表示形式。

例8 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，求$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$，$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

解 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$，

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

Γ函数在很多的科学技术领域内都有重要的应用，在概率论中，Γ函数是经常见到的。

§7 定积分在几何上的应用

定积分的应用很广泛，本节仅介绍它在几何上的应用，并结合具体问题，说明用定积分求某些量的方法。

我们已经知道，曲边梯形的面积，变速直线运动的路程都可以用定积分表示。那么一个能用定积分表示的量I应当具备什么性质呢？从前面的讨论可以看出：它应当是与某一个变量x的变化区间$[a, b]$相联系的整体量，并且这个整体量I，当区间$[a, b]$分割成若干个小区间后，就相应地分成了若干个部分量ΔI之和，即量I对于区间$[a, b]$具有可加性。

当所求量I可以表示为定积分$\int_a^b f(x)dx$时，根据本章§3定理1可知：$I(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$的一个原函数，从而被积式$f(x)dx$就是$I(x)$的微分，即$f(x)dx$是增量ΔI的线性主部，而增

量ΔI则是所求量I的部分量. 因此，用定积分来求整体量I的一个常用方法是，任取所求量I的一个微小的部分量ΔI，写出它的线性主部$dI=f(x)dx$，再在$[a, b]$上积分就得到所求量I. 这种通过取出所求量的微小部分量ΔI的线性主部dI，再积分求出I的方法，通常称为"微元法"或"元素法".

运用"微元法"的关键，在于对问题作符合实际情况的正确分析，用"以常代变"的方法求出ΔI的近似值$dI=f(x)dx$（这里，ΔI与$f(x)dx$之差是一个比dx更高阶的无穷小）进行积分，下面，通过实例来说明.

一 平面图形的面积S

1 直角坐标系中的计算方法

由曲线$y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$），直线$x=a$，$x=b$与ox轴所围成的曲边梯形的面积$S=\int_a^b f(x)dx$，而被积式$f(x)dx$正是在子区间$[x, x+dx]$上，以点x处的高$f(x)$近似代替了子区间$[x, x+dx]$上各点处的高之后，用小矩形的面积$f(x)dx$作为在子区间$[x, x+dx]$上的小曲边梯形的面积ΔS的近似值，如图6-17中的阴影部分所示，也就是说$dS=f(x)dx$，在$[a, b]$上积分，就得到曲边梯形的面积

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

例1 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积$S$.

解 由对称性，可先计算出椭圆在第一象限内的面积S_1（图6-18），则整个椭圆的面积$S=4S_1$.

椭圆在第一象限的方程是：

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant a.$$

故

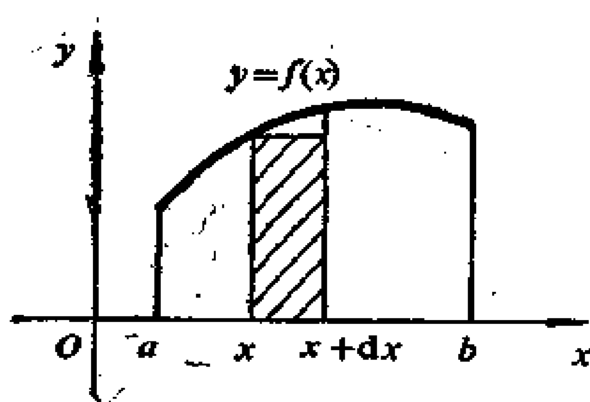


图 6-17

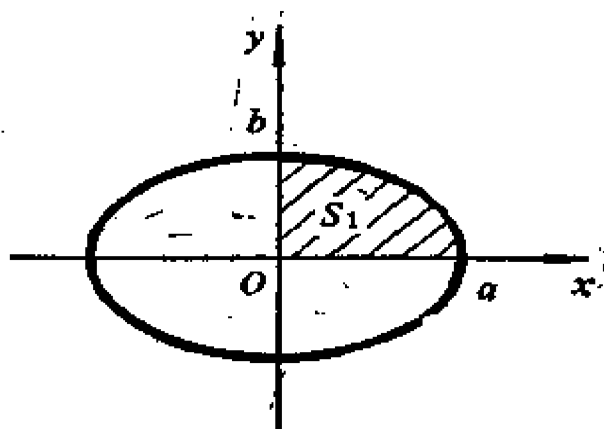


图 6-18

$$S=4S_1=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=\pi ab.$$

当 $a=b$ 时，椭圆变为半径为 a 的圆，于是得圆面积公式：

$$S=\pi a^2.$$

如果曲线 $y=f(x)$ 位于曲线 $y=g(x)$ 的上方，即当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，那么由 $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 这两条曲线和直线 $x=a$，$x=b$ 所围的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

这是因为 S 的微元 $\mathrm{d}S$，等于高为 $[f(x)-g(x)]$，宽为 $\mathrm{d}x$ 的矩形面积，即 $\mathrm{d}S=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$（图 6-19）的缘故。

类似地，如果曲线 $x=f(y)$ 位于曲线 $x=g(y)$ 的右方，即当 $c\leqslant y\leqslant d$ 时，$f(y)\geqslant g(y)$，那么由这两条曲线以及直线 $y=c$，$y=d$ 所围的平面图形的面积（图6-20）为

$$S=\int_c^d[f(y)-g(y)]\mathrm{d}y.$$

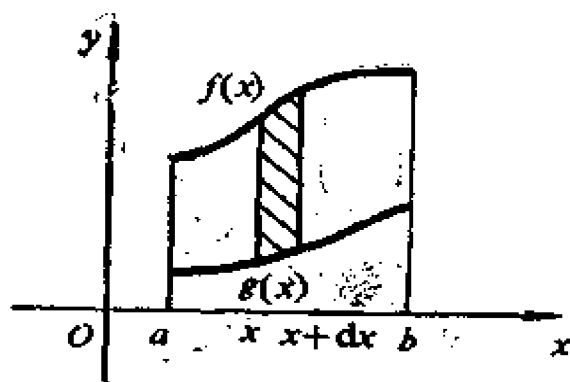


图 6-19

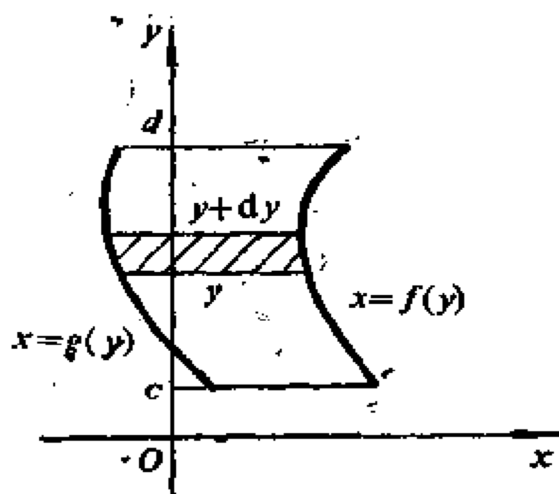


图 6 20

例2 计算由曲线$y=4-x^2$及$y=3x$所围图形的面积S.

解 先画出曲线$y=4-x^2$及$y=3x$的图形，解出这两条曲线的交点坐标$A(-4,-12)$，$B(1,3)$（图6-21）. 以x为积分变量，有

$$S=\int_{-4}^{1}((4-x^2)-3x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(4x-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-4}^{1}$$

$$=\frac{125}{6}.$$

例3 计算由曲线$y^2=2x$及$x-y=4$所围图形的面积S.

解 画出曲线$y^2=2x$及$x-y=4$的图形，解出交点坐标$A(2,-2)$，$B(8,4)$（图6-22），本例题若以x作积分变量，计算就比较麻烦，但是，若以y作积分变量，计算就比较方便，以y作积分变量时，曲线的方程为：$x=\frac{1}{2}y^2$及$x=y+4$，积分区间为$[-2,4]$，则有

$$S=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y$$

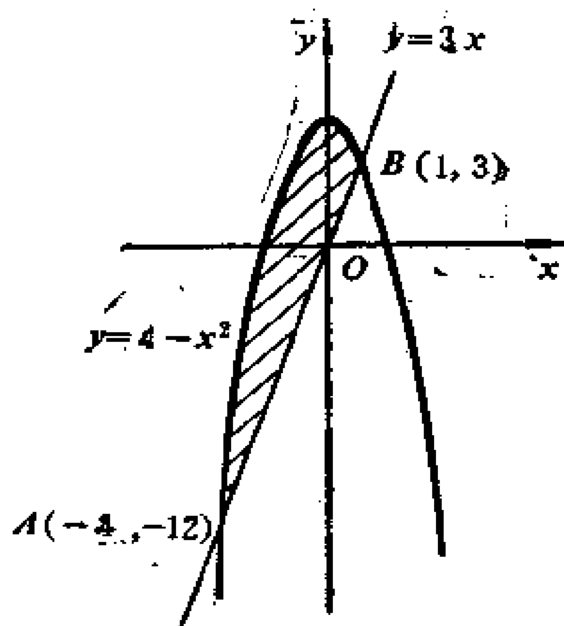


图 6-21

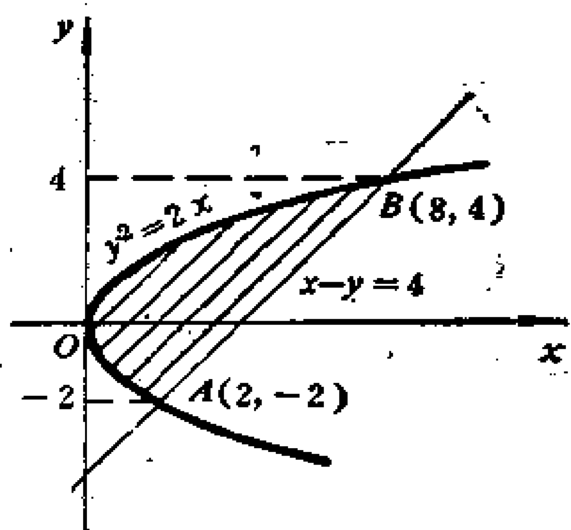


图 6-22

$$=\left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

$$=18.$$

用定积分解实际问题时，对同一个问题有时可以选取不同的积分变量，积分变量选取的不同，积分计算的难易也不同，应当注意选取积分变量，使所求的积分比较容易计算.

若曲边梯形的曲边由参量方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出，据定积分的换元公式，作代换$x=\varphi(t)$，并假定当t从α到β变化时，x相应地从a变到b，则曲边梯形的面积S为

$$S=\int_a^b y\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

当然这里假定$y\geqslant 0$.

例4　求摆线

形．现在用定积分计算曲边扇形的面积S．

取θ为积分变量，则积分区间为$[\alpha,\ \beta]$，考虑在$[\theta,\ \theta+\mathrm{d}\theta]$上的小曲边扇形的面积$\Delta S$，以$\theta$处的极径$\rho(\theta)$代替$[\theta,\ \theta+\mathrm{d}\theta]$上各点处的极径后，小曲边扇形的面积$\Delta S$就近似于一个圆心角为$\mathrm{d}\theta$，半径为$\rho(\theta)$的圆扇形（图 6-24 中的阴影部分）的面积，按圆扇形的面积计算出小曲边扇形的面积ΔS的近似值，就得到所求的曲边扇形面积S的微分$\mathrm{d}S$，即

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta.$$

积分，得

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta.$$

这就是在极坐标系中，曲边扇形面积的计算公式．

例5　求心形线$\rho=a(1+\cos\theta)$，$(a>0)$所围图形的面积S（图6—25）．

解　由于所求的心形线的图形是对称于极轴的，设位于极轴上半部的面积为S_1，则有

$$S=2S_1=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi[\rho(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$$

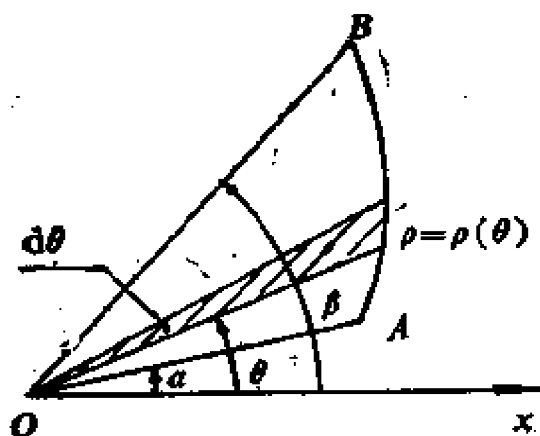


图 6-24

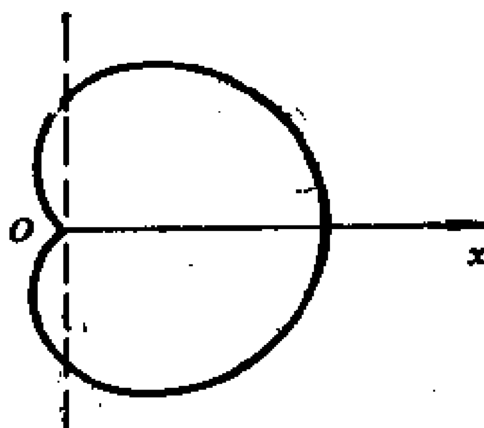


图 6-25

$$=\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{4}\right)\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

例6 求双纽线$\rho^2=a^2\cos2\theta(a>0)$所围图形的面积$S$（图6－26）.

解 由图形的对称性，双纽线所围的面积S等于它在第一象限内的面积S_1的4倍，故

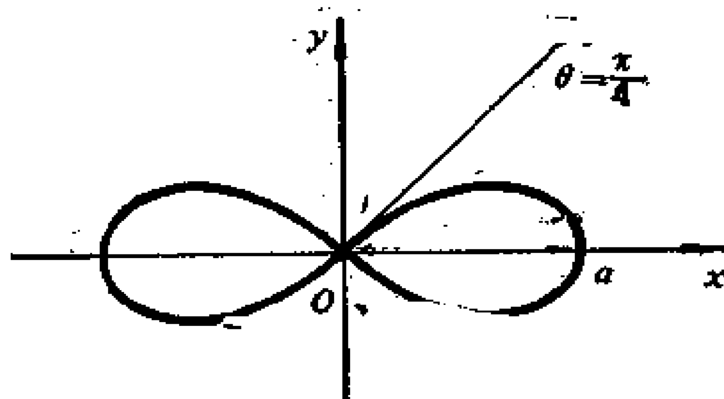


图 6-26

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=a^2.$$

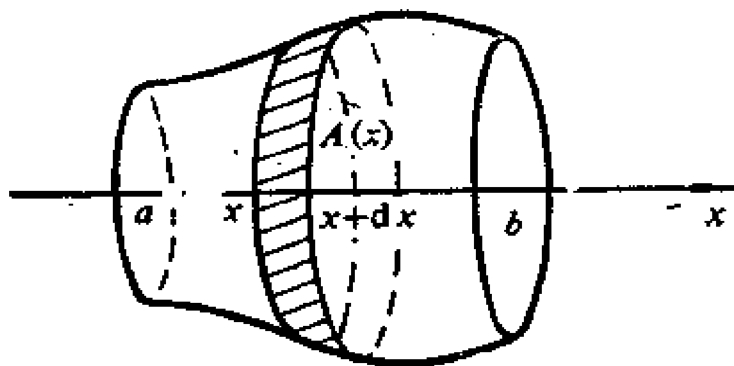


图 6-27

二　立体的体积V

1　平行截面面积为已知的立体体积

当一个立体被垂直于坐标轴的平面所截，其截面的面积可以用已知的连续函数来表示时，此立体的体积V可以用定积分来计算.

设有一个由曲面和垂直于ox轴的两个平面$x=a$，$x=b$ $(a<b)$，围成的立体（图6-27），若已知过点x且垂直于ox轴的平面截立体所得的截面面积为$A(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，用"微元法"，取$x$为积分变量，在立体中的一个微小的区间$[x, x+dx]$上，立体的体积$\Delta V\approx dV=A(x)dx$，在$[a, b]$上积分，就得到立体的体积公式：

$$V=\int_a^b A(x)dx. \tag{1}$$

例7　一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面构成的二面角为α（图6-28）计算这个平面截圆柱体所得的立体的体积V.

解　立体垂直于ox轴的截面为矩形，在任意的点$x(0\leqslant x\leqslant R)$处，截面的面积为：

$A(x)=AD\cdot CD=x\text{tg}\alpha\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}$.

故立体的体积为

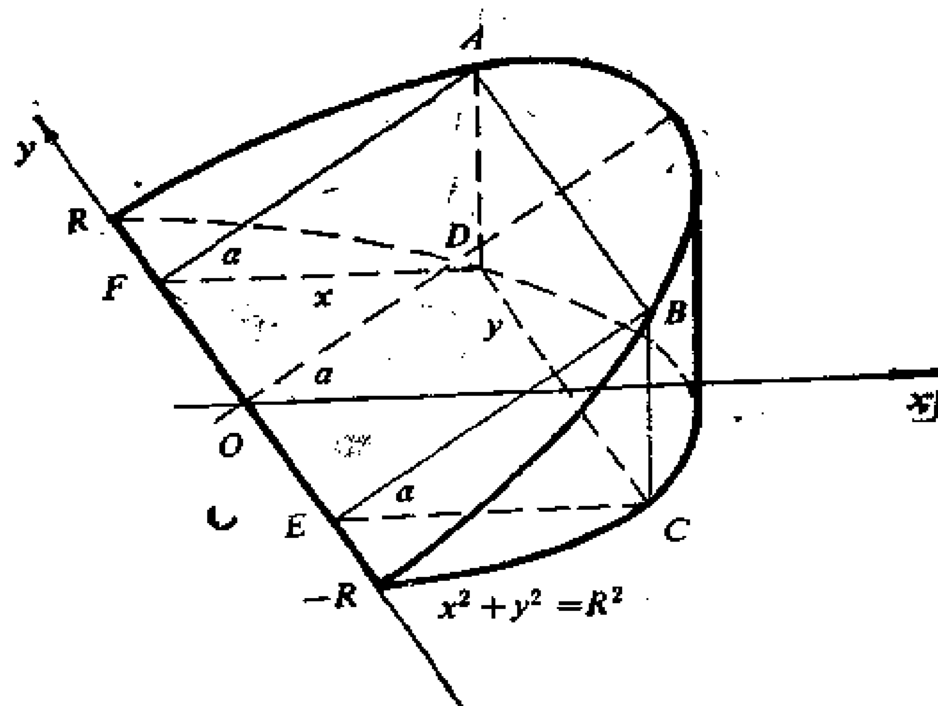


图 6-28

$$V=\int_0^R A(x)\mathrm{d}x=\int_0^R 2\mathrm{tg}\alpha\cdot x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{tg}\alpha\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}(R^2-x^2)$$

$$=\frac{2}{3}\mathrm{tg}\alpha\cdot R^3.$$

另一方面，这个立体垂直于y轴的截面是直角三角形，在任意一点y（$-R\leqslant y\leqslant R$）处，截面的面积为：

$$A(y)=\frac{1}{2}FD\cdot AD=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\cdot FD^2=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha(R^2-y^2)$$

取y为积分变量，积分得：

$$V=\int_{-R}^R A(y)\mathrm{d}y=\int_{-R}^R\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha(R^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\cdot\left(R^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-R}^R$$

$$=\frac{2}{3}\mathrm{tg}\alpha\cdot R^3.$$

2 旋转体的体积

一个平面图形绕着此平面上的一条直线旋转而成的立体，叫做旋转体，这一条直线称为旋转轴.

考虑由连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$及ox轴所围成的曲边梯形，绕ox轴旋转而成的旋转体（图6-29）. 显然，此旋转体的任何一个垂直于ox轴的截面都是圆，且在任意一点x处的截面的面积为：

$$A(x)=\pi[f(x)]^2$$

由平行截面面积为已知的立体体积公式（1），不难得出旋转体的体积公式：

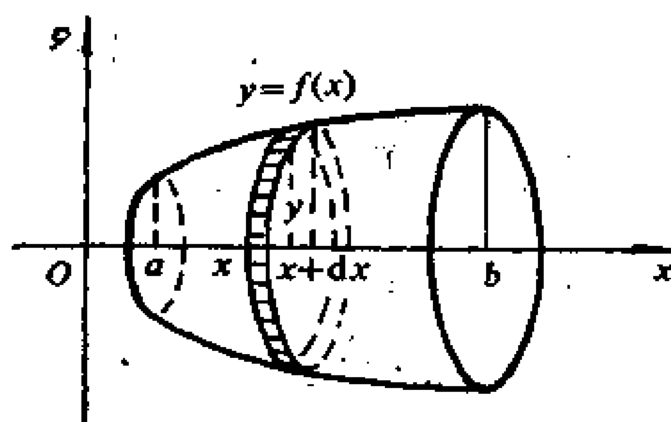


图 6-29

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x.\quad(2)$$

类似地，由连续曲线$x=\varphi(y)$，直线$y=c$，$y=d$ $(c<d)$及oy轴所围成的曲边梯形，绕oy轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\int_c^d\pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y.$$

例8 求半径为R的球的体积V.

解 如图6-30所示，球体可以看作上半圆周与ox轴围成的平面图形绕ox轴旋转而成，因为上半圆周的方程为$y=\sqrt{R^2-x^2}$，$(-R\leqslant x\leqslant R)$，所以球体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=2\int_0^R\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

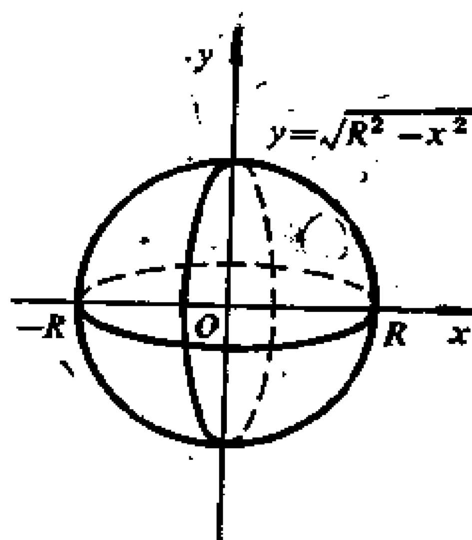


图 6-30

例 9 求由抛物线 $y=\sqrt{2px}$，直线$x=a$（p，$a>0$）及 ox 轴所围成的曲边梯形绕 ox 轴旋转而成的旋转体的体积 V（图6-31）.

解 $$V=\int_0^a \pi\left(\sqrt{2px}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a 2\pi px\mathrm{d}x$$

$$=\pi pa^2.$$

例10 求圆$x^2+(y-b)^2=R^2(b>R>0)$，绕ox轴旋转所成的环体的体积V（图6-32）.

解 环体的体积是由曲边梯形$EACBF$绕ox轴旋转所成的立体，与由曲边梯形$EADBF$绕ox轴旋转所成的立体的体积之差.因为曲线$\overset{\frown}{ACB}$的方程为$y=b+\sqrt{R^2-x^2}$，曲线$\overset{\frown}{ADB}$的方程为$y=b-\sqrt{R^2-x^2}$. 故所求的环体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(b+\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$-\int_{-R}^{R}\pi\left(b-\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=4\pi b\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

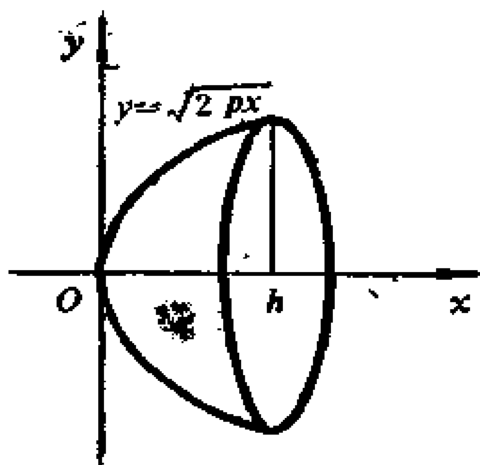


图 6-31

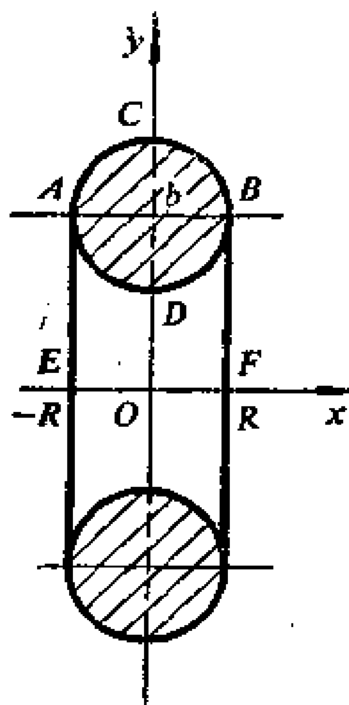


图 6-32

$$=4\pi b\cdot\frac{1}{2}\pi R^2$$
$$=2\pi^2 bR^2.$$

例11 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$分别绕$ox$轴及$oy$轴旋转所成的旋转体的体积$V_x$、$V_y$.

解 上半个椭圆与ox轴所围成的平面图形绕ox轴旋转所成的旋转体的体积即是V_x,由于上半椭圆弧的方程是:$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,故有

$$V_x=\int_{-a}^{a}\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^2\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

同理，有

$$V_y=\int_{-b}^{b}\pi\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2 dy$$

$$=\pi\cdot\frac{a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}(b^2-y^2)dy$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

当$a=b$时，就得到了半径为a的球的体积.

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

例12 计算由摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一拱，与$y=0$所围成的平面图形分别绕$ox$轴、$oy$轴旋转而成的旋转体的体积$V_x$，$V_y$.

解 如图 6-33所示。

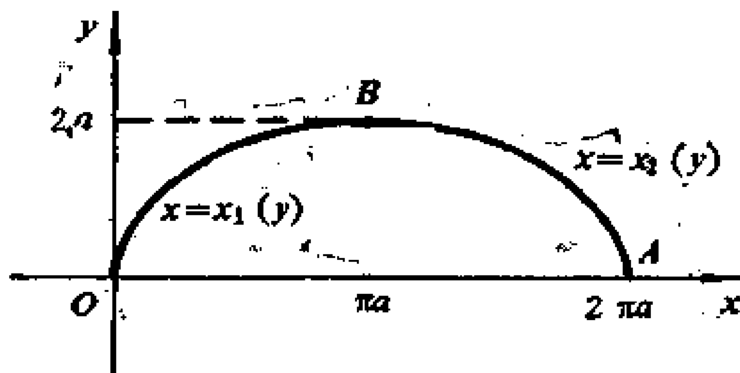


图 6-33

$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2 d[a(t-\sin t)]$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$=5\pi^3a^3$

而摆线的一拱与ox轴所围成的平面图形，绕oy轴旋转而成的旋转体的体积V_y，可以看成平面图形$OAB2aO$与$OB2aO$分别绕oy轴旋转而成的旋转体的体积之差，故

$$V_y=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t\mathrm{d}t$$

$$-\pi\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2a\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t$$

$$=6\pi^3a^3.$$

三　平面曲线的弧长s

设连续曲线$\overset{\frown}{AB}$的方程为$y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$），其中$f(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续的导数．求曲线$\overset{\frown}{AB}$的弧长s(图6-34)．

在直角坐标系下，对于曲线：$y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$），在$[a,b]$的任意一个子区间$[x, x+\mathrm{d}x]$上，曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的小弧段的弧长Δs的

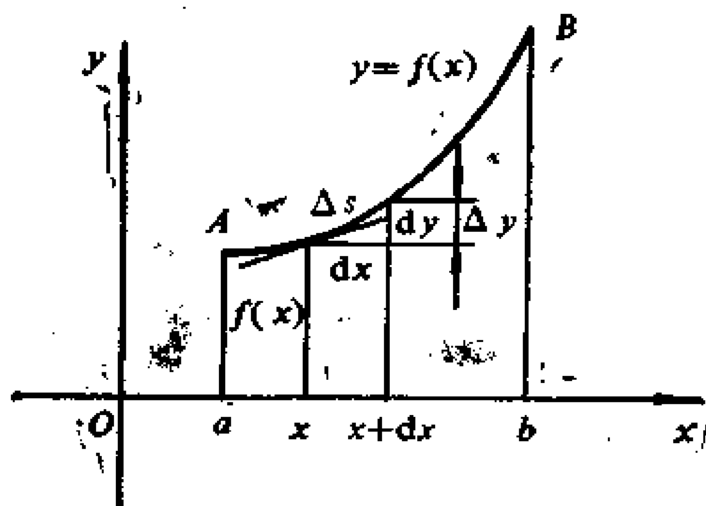


图 6-34

$$= 2\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{2b}{a^2}x\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{a^2}{b}\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{2b}{a^2}x\right)^2}\,d\left(\frac{2b}{a^2}x\right)$$

$$\overset{u=\frac{2b}{a^2}x}{=\!=\!=}\ \frac{a^2}{b}\int_0^{\frac{2b}{a}} \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{a^2}{b}\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^{\frac{2b}{a}}$$

$$= a\sqrt{1+\left(\frac{2b}{a}\right)^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\left[\frac{2b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{2b}{a}\right)^2}\right]$$

把$a=18$，$b=1.54$代入上式有

$$s\approx 36.17(\text{m}).$$

当曲线弧由参量方程$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出时，其中$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的导数．由于在$[\alpha,\beta]$上的任意一个子区间$[t,t+dt]$上，小弧段$\Delta s$的近似值$ds$为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2+\psi'^2(t)(dt)^2}$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

于是所求的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

例14 求摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，的一拱的弧长$s$.

解 $$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$=8a.$$

如果曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的方程由极坐标$\rho=\rho(\theta)$，$(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$给出时，由公式

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho(\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

可得

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+[\rho(\theta)]^2}\,d\theta.$$

于是曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+[\rho(\theta)]^2}d\theta.$$

例15 求阿基米德螺线$\rho=a\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$的长度$s$，其中$a>0$为常数（图6-36）.

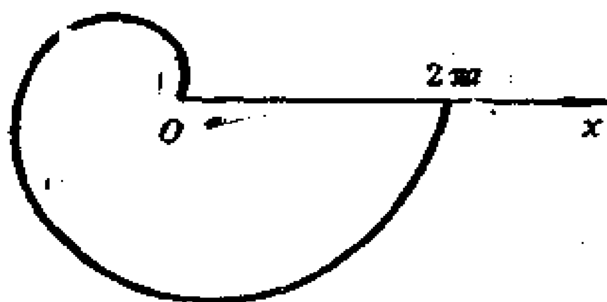


图 6-36

解 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+a^2\theta^2}d\theta=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}d\theta$

$$=a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})].$$

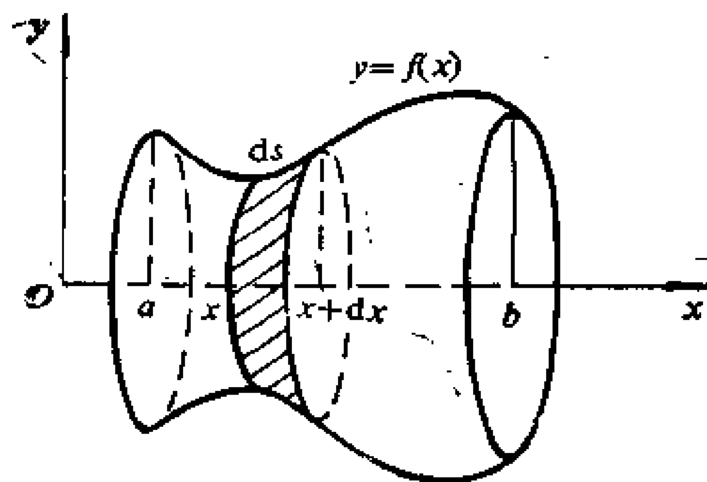


图 6 37

四　旋转体的侧面积

考虑一个旋转体，如图6-37所示．它的侧面是由区间$a\leqslant x\leqslant b$所对应的连续曲线：$y=f(x)$　（$f(x)\geqslant 0$）绕 ox 轴旋转而成的曲面，求此旋转曲面的侧面积S.

取x为积分变量，积分区间为$[a,b]$，考虑位于$[a,b]$上的任意一个子区间$[x,x+dx]$上的小窄带状侧面的面积ΔS，由于此小窄带状侧面是由$f(x)$的一小段弧ΔS旋转而成的，故小窄带状侧面的面积ΔS可以近似看成长为$2\pi y$，宽为ds的矩形面积，即ΔS的近似值dS为

$$dS=2\pi y ds=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

故

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

这就是旋转体的侧面积S的计算公式.

例16　在半径为R的球面上，（图 6-38）求横坐标由a至b（$-R\leqslant a<b\leqslant R$）的球带面的面积$S$.

解　此球带是由圆弧$y=\sqrt{R^2-x^2}$，（$a\leqslant x\leqslant b$），绕ox轴旋

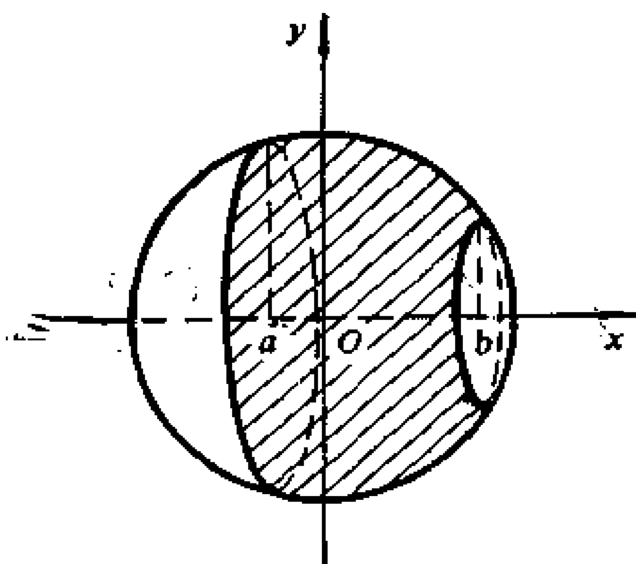


图 6-38

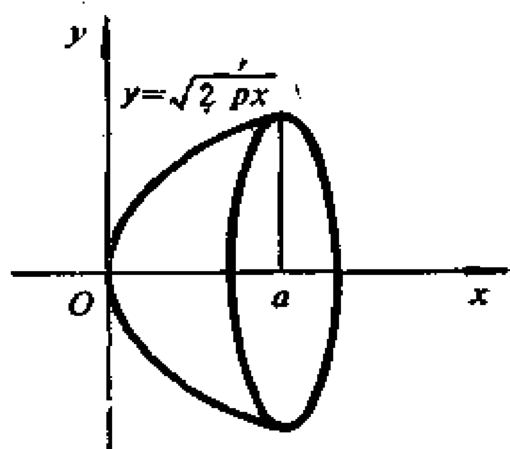


图 6-39

转而成，故有

$$S=\int_a^b 2\pi\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_a^b R\mathrm{d}x$$

$$=2\pi R(b-a).$$

当 $a=-R$，$b=R$时，就得到半径为R的球的表面积

$$S_{球}=2\pi R[R-(-R)]=4\pi R^2.$$

例17 探照灯的反光镜由一条抛物线$y^2=2px$（$p>0$，$0\leqslant x\leqslant h$），绕ox轴旋转而成，求反光镜的面积S（图6-39）.

解 因为$y=\sqrt{2px}$，（$p>0$，$0\leqslant x\leqslant h$）．所以

$$S=\int_0^h 2\pi\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{p}{2x}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}\,d(2x+p)$$

$$=\pi\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^h$$

$$=\frac{2\pi p^2}{3}\left[\left(\frac{2h}{p}+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

§8　定积分在物理上的应用

定积分在物理上有十分广泛的应用，本节仅简要介绍应用定积分解决变力作功、引力、液体的侧压力等方面的问题.

一　变力所作的功

设力的大小为 f，其方向与 ox 轴平行，某物体受力 f 的作用，由点 $x=a$ 沿 ox 轴移动到点 $x=b$ （$a<b$），求力 f 所作的功 W.

如果 f 是常力，那么它所作的功 W 等于 f 乘以物体移动的路程：

$$W=f\cdot(b-a).$$

如果 f 是变力，即在 ox 轴上的不同点处，f 的大小也不同. 这时，$f=f(x)$，是一个随 x 而变的函数，采用微元法：先把 $[a,b]$ 分成 n 个子区间，在子区间 $[x,x+dx]$ 上变力所作的功为 ΔW，它可以用功的微元 dW 来近似代替（图 6-40），即

$$dW=f(x)dx,$$

于是

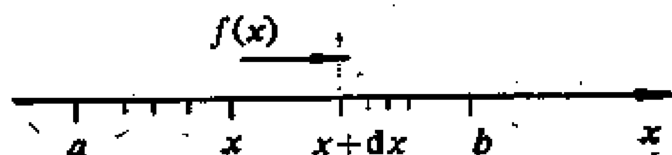


图 6-40

$$W=\int_a^b dW=\int_a^b f(x)\,dx.$$

这就是说，变力$f(x)$所作的功，等于它在区间$[a, b]$上的定积分。

例1 一个弹簧原长为0.1m，一个力f(N)把它由原长拉长了0.06m（图6-41）。求力f所作的功W。

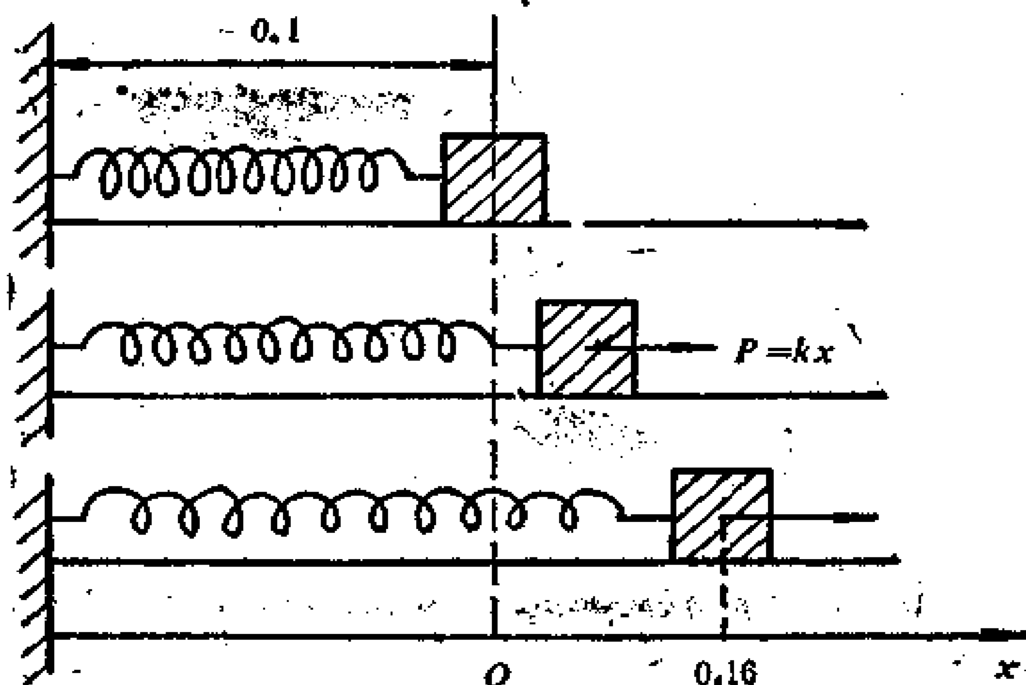


图 6-41

解 由物理学知道，拉力f（N）与弹簧的伸长量s（m）成正比，即$f=ks$（k为比例常数）。按图6-41选取坐标系，伸长量为x，拉力为$f=kx$，以米为单位积分区间是$[0, 0.06]$，于是力f所作的功W为：

$$W=\int_0^{0.06} f\,dx=\int_0^{0.06} kx\,dx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0.06}$$

$$=0.0018k\quad(\text{J}).$$

另外，本例若把坐标原点选在弹簧的固定端，则伸长量

$s=(x-0.1)$，拉力为$f=k(x-0.1)$，而积分区间为[0.1, 0.16]（长度以米为单位）有

$$W=\int_{0.1}^{0.16}k(x-0.1)\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x-0.1)^2\Big|_{0.1}^{0.16}$$

$$=0.0018k \quad (\mathrm{J}).$$

例2 一个圆柱形的储水罐，高 5 m，底圆半径 3 m，罐内盛满了水，求把罐内的水全部抽出所作的功W.

解 如图 6-42 所示，选取ox轴. 以水的深度x（m）为积分变量，积分区间为[0，5]. 设想把罐内的水分成许多水平的薄层，则在任意的一个小区间[x，$x+\mathrm{d}x$]上的一薄层水的厚度为$\mathrm{d}x$（m）. 因此，这一薄层水的重量为$9.8(\pi\cdot 3^2)\cdot 10^3\mathrm{d}x$(N). 若把这一薄层水抽出所走过的路程用$x$近似代替，则抽出这一薄层水所作的功$\Delta W$可近似用$\mathrm{d}W=9.8\cdot(\pi\cdot 3^2)\cdot x\cdot 10^3\mathrm{d}x$表示. 在[0，5]上积分，有

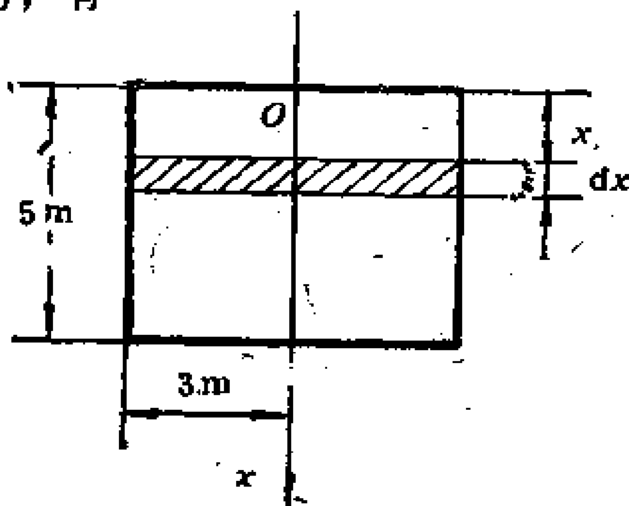


图 6-42

$$W=\int_0^5 \mathrm{d}W=\int_0^5 9.8\cdot(\pi\cdot 3^2)\cdot x\cdot 10^3\mathrm{d}x$$

$$=(88.2\pi\times 10^3)\int_0^5 x\mathrm{d}x$$

$$\approx 3.46\times 10^6 \quad (\mathrm{J}).$$

例3 把电量Q（C）的点电荷放在ox轴的原点，它产生一个电场，由库伦定律，把一个单位正电荷放在场中ox轴上距离原点O为x（m）的地方．电场对它的作用力大小为$F=k\cdot\frac{Q}{x^2}$ N（k为常数）．求

（1）场力把单位正电荷沿ox轴由$x=a$（m）处移至$x=b$（m）处所作的功W_1；

（2）场力把单位正电荷沿ox轴由$x=a$（m）移至无穷远点所作的功W_2．

解 这是变力作功的问题（图 6-43）．

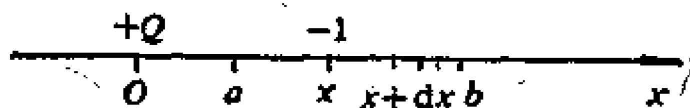


图 6-43

（1）由于 $dW_1=k\cdot\frac{Q}{x^2}dx$，故

$$W_1=\int_a^b k\cdot\frac{Q}{x^2}\,dx=kQ\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b$$

$$=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\quad(\mathrm{J});$$

（2）$W_2=\int_a^{+\infty}k\cdot\frac{Q}{x^2}\,dx=\frac{kQ}{a}\quad(\mathrm{J})$．

二 引力问题

万有引力定律告诉我们，质量为m_1，m_2相距为r的两个质点是相互吸引的、引力的方向沿着两个质点的联线，引力的大小为

$$F=k\frac{m_1m_2}{r^2}.$$

这里，$k>0$ 为引力系数.

对于一个物体和一个质点（或两个物体），如果它们的距离非常遥远，那么都可以把它们近似地看成质点，直接用上面的公式来计算引力即可. 但是如果它们之间的距离不大，则在某些特殊的情况下可以用定积分的方法来解决. 下面通过一个例子来说明引力问题的计算方法.

例4 设有一长为 l，质量为M的均匀细直棒，在棒所在的直线上距棒的近端距离为 a 处有一个质量为 m 的质点，求棒对质点的引力F.

解 在本例中，由于直棒与质点在同一条直线上，当分割直棒为 n 个小段时，将每个小段与质点之间的引力大小直接相加就可以得到直棒与质点之间的引力（即满足可加性）. 因此，这个问题可以用定积分来解决. 如图 6-44 选取坐标系，使棒的一端位于坐标原点O，质点位于 $l+a$ 处. 把细棒上相应于$[x, x+\mathrm{d}x]$的一段近似地看成质点，其质量为$\frac{M}{l}\mathrm{d}x$，这一小段棒与质点的距离是 $l+a-x$，则有

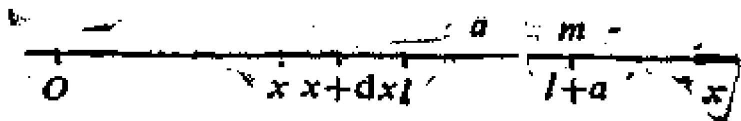


图 6-44

$$\mathrm{d}F=-k\frac{m\frac{M}{l}\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2}=-\frac{kMm}{l(l+a-x)^2}\mathrm{d}x,$$

$$F=\int_0^l \mathrm{d}F=-\int_0^l \frac{kMm}{l(l+a-x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{kMm}{l}\int_0^l \frac{\mathrm{d}[x-(l+a)]}{[x-(l+a)]^2}$$

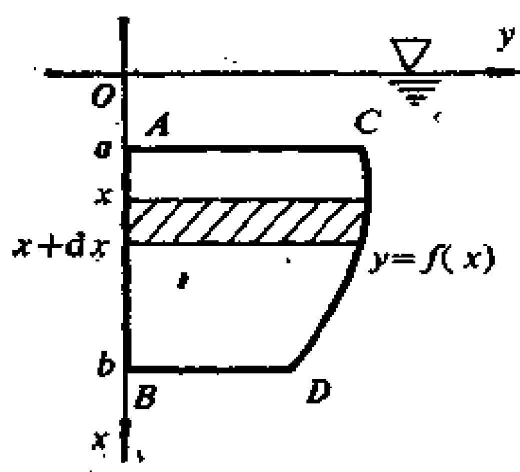


图 6-45

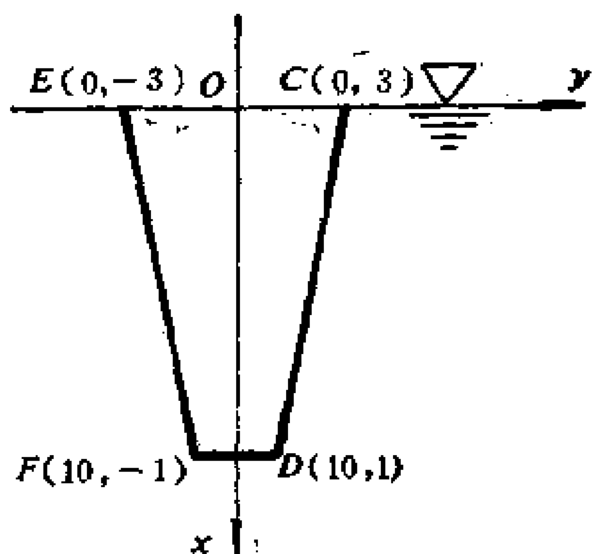


图 6-46

即 $y=-\frac{1}{5}x+3$.

由于闸门以ox轴对称轴，故只需计算它的一半的压力，再乘以2.

$$P=2\int_0^{10}\gamma x\left(-\frac{x}{5}+3\right)\mathrm{d}x=\frac{500}{3}\gamma$$

$$\approx 1.63\times10^6\text{(N)}.$$

四 函数的平均值

1 连续函数的平均值

平均值问题是实际问题中常见的问题. n个离散量y_i（$i=1,2,\cdots,n$）的算术平均值$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$，是大家所熟知的.

若$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，由定积分的中值定理可知，$f(x)$在$[a,b]$上的平均值为：

$$\overline{y}=f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例6 设纯电阻电路中的正弦交流电的电流 $i=I_m\sin\omega t$，其中常数I_m为电流最大值，ω为角频率.

(1)求电流 i 在半周期区间$\left[0,\frac{\pi}{\omega}\right]$上的平均值$\overline{i}$.

(2)若电路中的电阻为R，求在一个周期上交流电的平均功率$\overline{p}$.

解 (1) $\overline{i}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}I_m\sin\omega t\mathrm{d}t=\dfrac{\omega I_m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t\mathrm{d}t$

$$=\frac{2}{\pi}I_m.$$

(2) 因为电路中的电压$U=iR=I_mR\sin\omega t$，所以功率 $p=Ui=I_m^2R\sin^2\omega t$，在一个周期区间$\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]$上的平均功率为

$$\overline{p}=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}I_m^2R\sin^2\omega t\mathrm{d}t=\frac{I_m^2R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\mathrm{d}(\omega t).$$

$$=\frac{I_m^2R}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1-\cos2\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{1}{2}I_m^2R.$$

若取$U_m=I_mR$，则上面的结果可以记成：$\overline{p}=\frac{1}{2}I_mU_m$.这就是说在纯电阻电路中，正弦交流电的平均功率等于电流与电压的最大值的乘积的一半.日常生活中所用的交流电器上标明的功率，就是指的平均功率$\overline{p}$.

***2 均方根值**

交流电的电流 $i=i(t)$的大小和方向是随着时间的变化而变的.但是，在一般的电器上却标明有确定的电流值，这实际上是指

交流电的有效值.

若交流电流$i(t)$在一个周期内，消耗在电阻R上的平均功率等于某直流电流I消耗在同一电阻R上的功率时，就称该直流电流I的数值为交流电流$i(t)$的有效值.

例7 在纯电阻电路中，若电阻为R，交流电流$i=i(t)$，求电流$i(t)$的有效值I.

解 电流$i(t)$在R上消耗的功率为$i^2(t)R$，它在一个周期区间$[0,T]$上的平均值为$\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$. 设直流稳恒电流$I$在$R$上消耗的功率为$I^2R$. 则有

$$I^2R=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t=\frac{R}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t,$$

知有效电流I的值与R无关.

$$I^2=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t,$$

即
$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}.$$

同理，还可以推出交流电压$u=u(t)$的有效值U的公式

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}.$$

例8 在纯电阻电路中的正弦交流电，其电流强度为$i=I_m\sin\omega t$，其中I_m为电流的最大值，ω是角频率. 求电流的有效值I及电压的有效值U.

解 $I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{I_m^2}{2}}$

$$=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707I_m.$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_m R)^2\sin^2\omega t\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{\frac{U_m^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{U_m^2}{2}}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

$$\approx 0.707U_m.$$

例 8 说明，正弦交流电电流的有效值为其峰值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍，而电压的有效值也为其峰值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍．对平常的照明用电，其电压为 $u(t)=311\sin 100\pi t$，其电压峰值为311 V，因而电压的有效值为：$U=\frac{311}{\sqrt{2}}\approx 219.9\approx 220(\mathrm{V})$.

在数学领域内的统计学上，称$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$ 为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的均方根．因此，在交流电路中，电流、电压的有效值就是它们在一个周期上的均方根值．

第七章　空间解析几何与矢量代数

解析几何是用代数方法研究几何问题的学科.

在平面解析几何中，通过坐标法，将平面上的点与有序数组、平面的图形与方程建立了一一对应的关系. 在这基础上，本章将按照类似的方法，讨论空间图形与方程的对应关系. 从而，用代数方法研究空间图形的几何问题.

另外，由于自然科学和数学的需要，本章还将介绍矢量代数的有关基础知识. 并以矢量为工具，研究有关的空间图形问题.

§1　空间直角坐标系

一　空间点的直角坐标

为建立空间图形与方程的联系，需要建立空间点与数组之间的联系. 这种联系常是通过空间直角坐标系来实现.

空间直角坐标系规定如下：

过空间一定点O，作三条互相垂直的数轴，它们都以O为原点，且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别称为x轴(横轴)、y轴（纵轴）、z轴（竖轴）；统称坐标轴. 它们的正向构成右手系，即如右手的姆指、食指指向x轴、y轴的正向，则中指所指的方向为z轴的正向. 这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系，点O称为坐标原点.

三条坐标轴中的任意两条轴所确定的平面称坐标面，相应称为xoy面、yoz面、zox面. 三个坐标面把空间分成八个部分. 每一部分称为一个卦限. 含有x轴、y轴与z轴正半轴的那个卦限称为

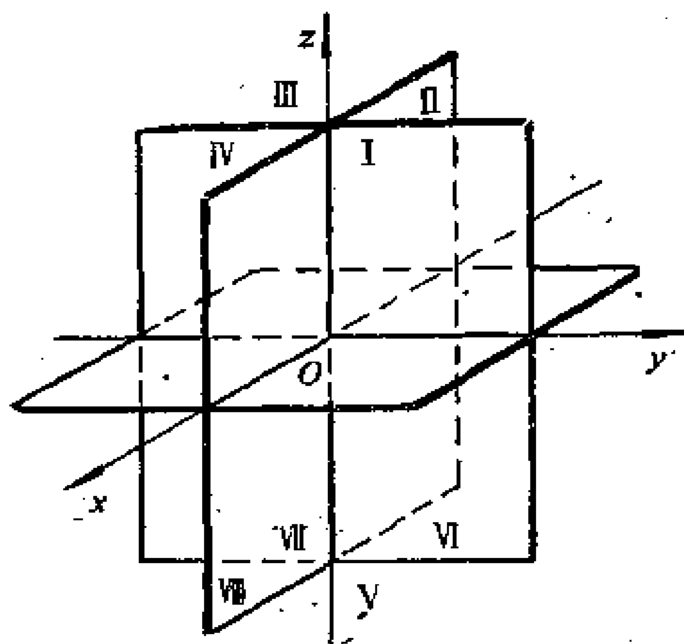


图 7-1

第一卦限．其他第二、第三、第四卦限在xoy面的上方，且按逆时针方向确定、第五至第八卦限在xoy面的下方。第五卦限在第一卦限下方．按逆时针方向确定．这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（见图7-1）．

取定空间直角坐标系后，就可以建立空间点与数组之间的对应关系．

设M为空间一个点，过点M作三个平面分别垂直于x轴、y轴和z轴．它们与x轴、y轴、z轴交点依次为P、Q、R（见图7-2）．这三点在x轴、y轴、z轴的坐标依次为x、y、z．于是，空间的一个点M,就唯一地确定了一个有序数组x、y、z．反过来，若已知一有序数组x、y、z．可依次在x轴、y轴、z轴上分别取坐标为x、y、z的对应点P、Q、R，然后，过P、Q、R分别作垂直于x轴、y轴、z轴的平面．这三个平面的交点M便是由有序数组x、y、z所确定的唯一的点M．这样，就建立了空间点M和有序数组x、y、z之间的一一对应关系．这组数x、y、z称为点M的坐标．并依次称x、y、z为点M的横坐标、纵坐标、竖坐标．坐

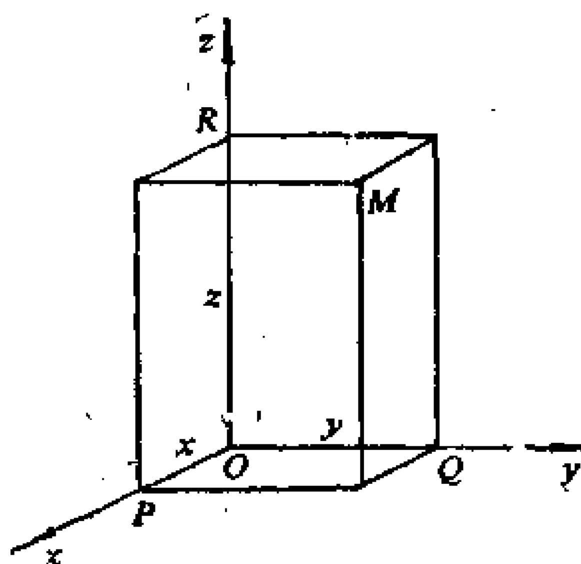


图 7-2

标为 x、y、z 的点M通常记为$M(x, y, z)$.

这样，在空间直角坐标系下，就建立了空间点M与有序数组(x, y, z)之间的一一对应关系.

空间点在空间直角坐标系的八个卦限内的不同卦限，其坐标的正负号亦不同，下面由表格给出：

卦　限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
坐标的正负号	(+, +, +)	(−, +, +)	(−, −, +)	(+, −, +)
卦　限	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标的正负号	(+, +, −)	(−, +, −)	(−, −, −)	(+, −, −)

由此，可给出两个点关于坐标面、坐标轴、原点的对称含义.

两个点M、Q称为关于xoy面对称，即连接两点的线段MQ与xoy面垂直，且被其平分. 若点M的坐标为(x, y, z)，则点M关于xoy面对称的点Q的坐标为$(x, y, -z)$（见图7-3）. 同样，点$M(x, y, z)$关于yoz面对称的点Q的坐标为$(-x, y, z)$；

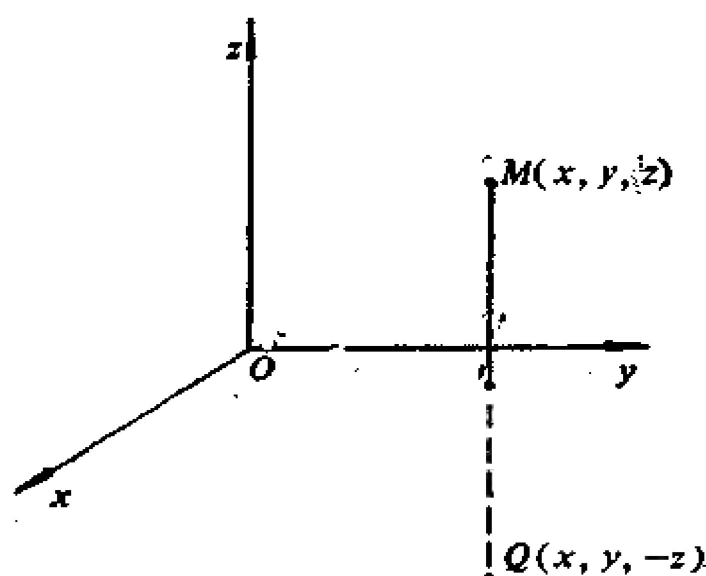


图 7-3

点$M(x,y,z)$关于 zox 面对称的点Q的坐标为$(x,-y,z)$.

两个点M，Q称为关于 z 轴对称，即连接两点的线段MQ与 z 轴垂直相交，且被 z 轴所平分。容易看出，若点M坐标为(x,y,z)，则点M关于 z 轴对称的点Q的坐标为$(-x,-y,z)$（见图7-4）。同样，点$M(x,y,z)$对称于x 轴的点的坐标为$(x,-y,-z)$；点

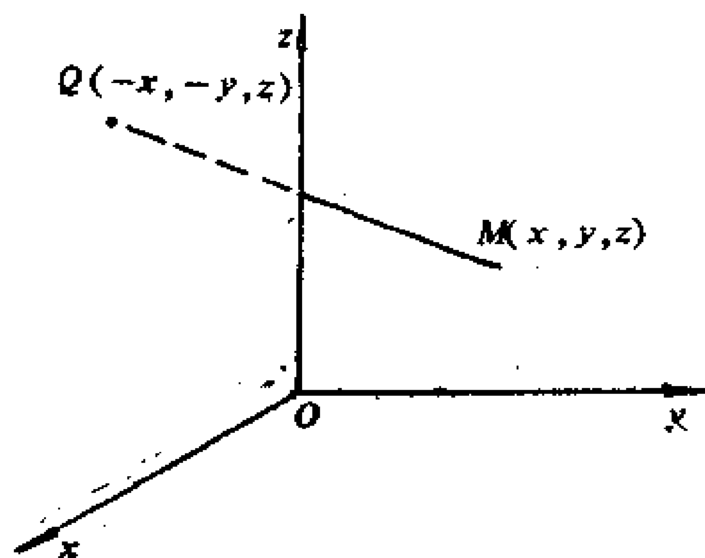


图 7-4

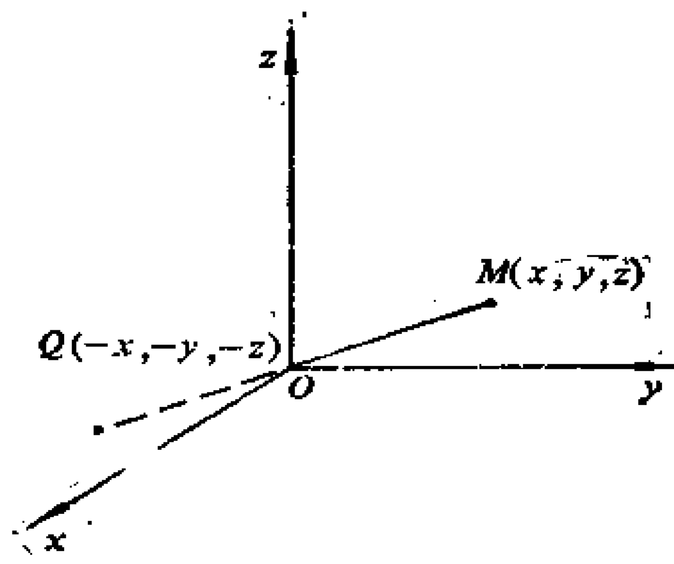


图 7-5

$M(x, y, z)$对称于y轴的点的坐标为$(-x, y, -z)$.

两个点M，Q称为对称于原点O，即连接两点线段MQ通过点O，且被点O所平分. 点$M(x, y, z)$关于点O对称的点Q的坐标为$(-x, -y, -z)$（见图7-5）.

特别是在坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 如果点M在yoz面上，则有$x=0$；同样，在zox面上的点，有$y=0$；在xoy上的点，有$z=0$. 如果点M在x轴上，则$y=z=0$；同样，在y轴上的点，有$x=z=0$，在z轴上的点，有$x=z=0$. 如果M点在原点，则有$x=y=z=0$.

二　空间两点间的距离

设空间两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$，如何用两点的坐标来表达它们间的距离d. 可以过点M_1、M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体（见图7-6）.

由于$\triangle M_1NM_2$是直角三角形（其中$\angle M_1NM_2$为直角）. 有

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$
$$= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

$$|OA| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3,$$

$$|OB| = \sqrt{3^2+(-1)^2+0} = \sqrt{10},$$

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(0-2)^2} = 3.$$

所以 $|OA| = |AB|$，故$\triangle OAB$为等腰三角形. 证毕

例2 过点$M_0(-2,3,2)$作一直线平行于 y 轴，求此线上与原点距离为3的点的坐标.

解 因过点$M_0(-2,3,2)$而平行y轴的直线上所有点的x坐标皆为-2，z坐标皆为2，仅y坐标不同. 故可设所求点为$M(-2,y,2)$，由题意，有

$$|OM| = \sqrt{(-2)^2+y^2+2^2} = 3,$$

解得

$$y = \pm 1.$$

故所求点坐标为$(-2,1,2)$和$(-2,1,2)$.

§2 矢量代数

一 矢量概念

在自然科学中，经常遇到这样一种量，它们既有大小，又有方向. 例如，力、速度、位移等等，这一种量称为矢量(向量).

在数学上，往往用有向线段表示矢量，有向线段的长度表示为矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向. 以M_1为起点，M_2为终点的有向线段表示的矢量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$. 有时表示矢量也可用一个粗体字母或一个上面加有箭头的字母，如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$或$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{i}$、$\vec{F}$等等(见图7-7).

矢量的大小称为矢量的模. 矢量$\boldsymbol{a}$(或$\vec{a}$)、$\overrightarrow{M_1M_2}$的模依次记为$|\boldsymbol{a}|$(或$|\vec{a}|$)、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 模等于1的矢量称为单位矢量. 模等于零的矢量称为零矢量. 零矢量的方向可以看作是任意的，记

为o（或$\vec{o}$）.

概括地说，矢量的两个要素是模和方向.

定义 若两个矢量模相等，方向相同，则称为这两个矢量相等.

在实际问题中，有些矢量与其起点有关，有些矢量与其起点无关. 在数学上，一般着重研究与起点无关的矢量，并称其为自由矢量.

二 矢量的运算

1 矢量的加法

设两个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，关于它们的加法定义如下：

定义 以一定点为始点，作矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$. 以这两个矢量为邻边作平行四边形，从定点到这平行四边形的对角的顶点所构成的矢量，称为矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图7-8）.



图 7-7

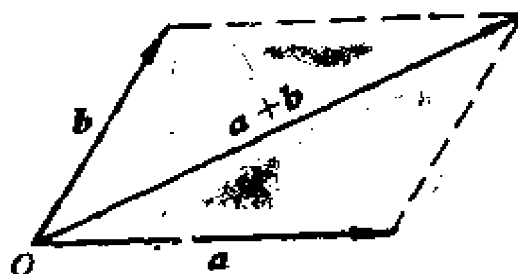


图 7-8

以上这种求两个矢量和的方法，称为两矢量和的平行四边形法.

如果两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在同一直线上，那末规定它们的和是这样一个矢量：当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同方向时，和矢量的方向与原来的两矢量方向相同，其模等于两矢量模的和；当$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，和矢量的方向与模较大的矢量同向，而模等于两矢量的模的差.

作二矢量和的另一方法是，先作矢量 $\boldsymbol{a}$，再以 $\boldsymbol{a}$的终点作为 $\boldsymbol{b}$

的始点作 $\boldsymbol{b}$，则从 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所构成的矢量，就是矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图7-9）．此方法称为两矢量和的三角形法．三角形法对于多个矢量的求和较为方便．即以前一个矢量的终点，作为下一个矢量的起点，直至最后一个矢量．则由第一个矢量起点与最后一矢量终点所构成的矢量，即为所求的和矢量．

矢量的加法满足以下运算律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

两矢量和的交换律可由求和的平行四边形法得到（见图7-8）．结合律可由三角形法得到（见图7-10）．

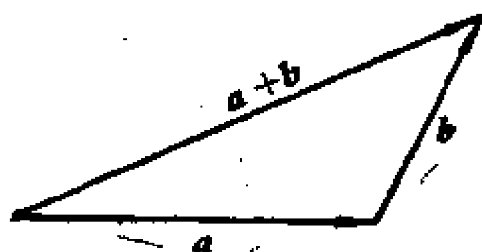


图 7-9

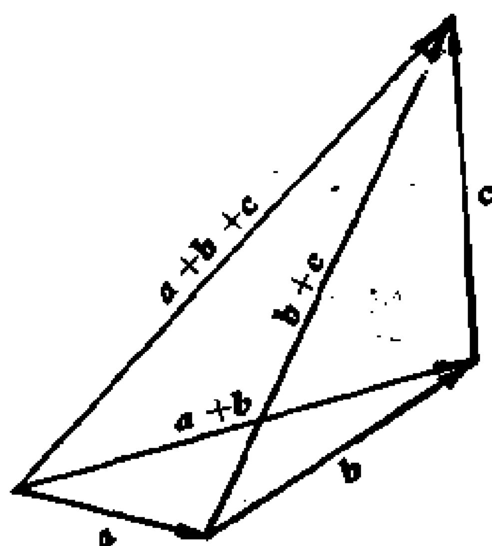


图 7-10

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不为零矢量时，由三角形法可以看出

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \qquad (1)$$

等号成立，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同，事实上，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 构成一个三角形，则由三角形两边之和大于第三边，得到

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同，则等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

成立；若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反，则

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$ 证毕

不等式(2)称为三角形不等式。它反映三角形两边之和大于第三边这一事实.

2　矢量的减法

为定义两个矢量的差，先引入逆矢量（负矢量）的概念. 设 $\boldsymbol{a}$ 为一矢量. 则与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，方向相反的矢量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆矢量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

定义　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的逆矢量 $-\boldsymbol{b}$ 的和. 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差（见图7-11）.

3　矢量与数的乘法

定义　设 λ 是一实数. $\boldsymbol{a}$ 是非零矢量，它们的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 定义如下：

（1）　$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个矢量；

（2）　$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍；

（3）　$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：

若 $\lambda>0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；

若 $\lambda<0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；

若 $\lambda=0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零矢量.

特别是当 $\lambda=0$、1、-1 时，有

$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\qquad 1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\qquad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},$$

即分别得到零矢量、矢量本身和逆矢量.

矢量与数量的乘积满足以下运算律（设 λ，μ 为实数）：

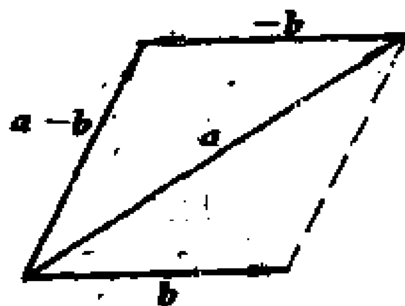


图 7 11

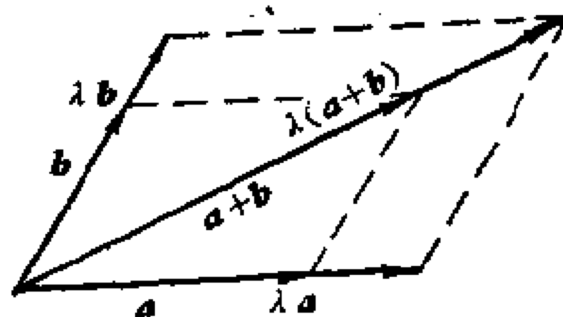


图 7-12

（1）结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（3）分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．

运算律（1）、（2）是明显的．请读者自己证明．

证明（3）

若$\lambda=0$，两端都是零矢量．

若$\lambda>0$．当平行四边形的两邻边各变为λ倍时，所得的平行四边形与原平行四边形相似．因此，所得到的平行四边形的对角线与原平行四边形的对角线方向重合，且是它的λ倍（见图7-12）．故

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

若$\lambda<0$，先作以$|\lambda|\boldsymbol{a}$，$|\lambda|\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形，然后将所得到的平行四边形绕O点旋转180°，得到新的平行四边形的两邻边$\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{b}$而对角线为$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$（见图7-13）．从而，

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

证毕

由矢量与数量乘积定义，可以推出如下结论：设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零矢量，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行的充分必要条件是

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\qquad (\lambda\text{常数}),\qquad (2.1)$$

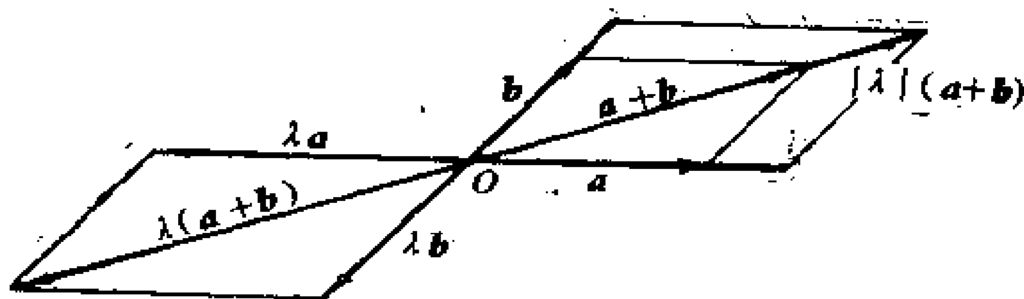


图 7-13

若 $a\neq o$，则$\frac{1}{|a|}a$ 是与a 同方向的单位矢量，记作a^0。即

$$a^0=\frac{a}{|a|}\qquad（或\ a=|a|\,a^0）.$$

三　矢量的坐标表达式

1　矢量在轴上的投影

为了沟通数与矢量的联系，需借助于矢量在坐标轴上的投影来实现.

设矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 l的正向夹角为φ　($0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)．过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A，终点B分别作轴 l 的垂直平面，这两个垂面与 l 轴的交点A'，B' 分别叫作点A和点B在 l 轴上的投影（图7-14）．轴 l 上的有

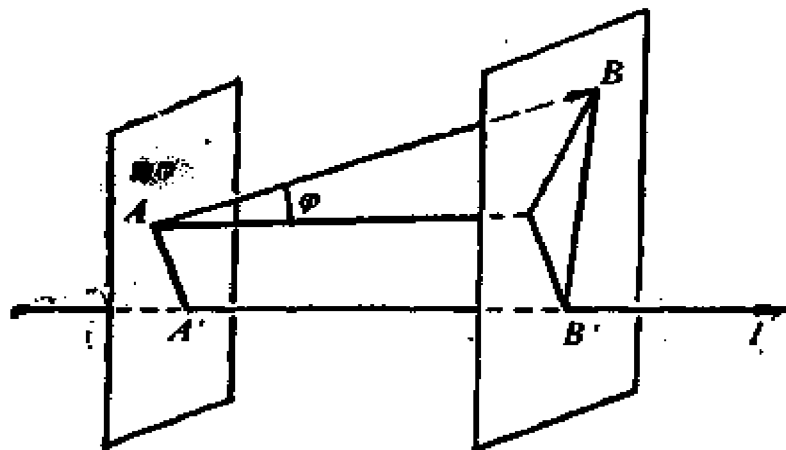


图 7-14

向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值$A'B'$，称为矢量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的投影．记为$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A'B'$．轴$l$上有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值$A'B'$是这样一个数：这数的绝对值等于$\overrightarrow{A'B'}$的长度．这数的符号由$\overrightarrow{A'B'}$的方向决定：当$\overrightarrow{A'B'}$与$l$同向时，$A'B'>0$；当$\overrightarrow{A'B'}$与$l$反向时，$A'B'<0$．当$A'B'$重合时，$A'B'=0$．

如果在轴l上选定原点及单位长度，并以x_1、x_2分别表示A'、B'在数轴l上的坐标，则容易验证$\overrightarrow{AB}$在数轴l上的投影有下式成立：

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=x_2-x_1 \tag{2.2}$$

关于矢量的投影，还有以下两个定理：

定理1 矢量$\overrightarrow{AB}$在轴l上的投影，等于矢量的模乘以轴与矢量夹角的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi, \tag{2.3}$$

其中φ为轴l与矢量$\overrightarrow{AB}$的夹角．

证明 如图7-15．过矢量$\overrightarrow{AB}$的起点A引l'，使其与l平行，且同向，则轴l与$\overrightarrow{AB}$夹角等于轴l'与$\overrightarrow{AB}$的夹角φ，且有

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{l'}\overrightarrow{AB},$$

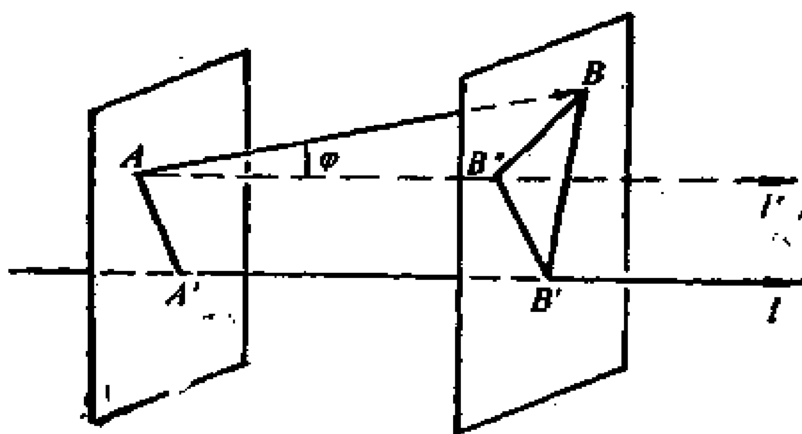


图 7-15

又

$$\mathrm{Prj}_{l'}\overrightarrow{AB}=AB''=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$ 证毕

由定理可以看出，$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影与$\overrightarrow{AB}$与 l 的夹角 φ 有关. 当 φ 为锐角时，投影为正；当 φ 为钝角时，投影为负；当 φ 为直角时，投影为零.

推论 相等的矢量在同一轴上的投影相等.

定理2 两个矢量的和在轴上的投影等于两个矢量在该轴上投影的和. 即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2. \tag{2.4}$$

证明 如图7-16，由矢量加法的三角形法，设$\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{BC}$，则

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

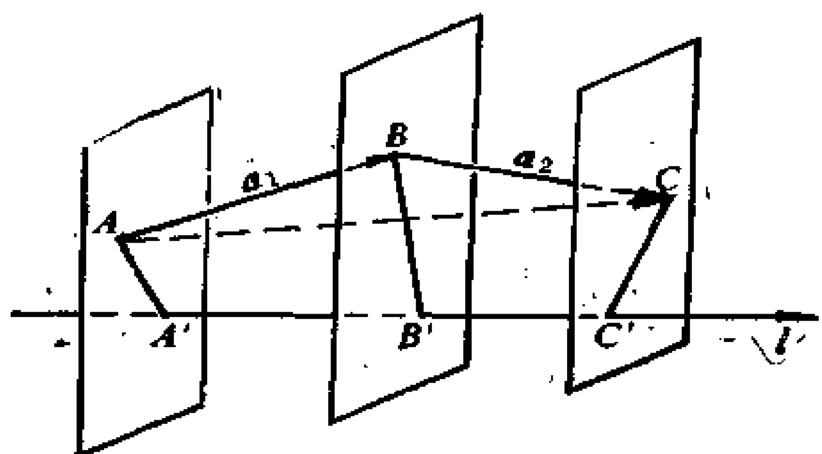


图 7-16

设点A、B、C在轴 l 上的投影为A'、B'、C'，在轴上选定原点及单位长度，并设A'、B'、C'的坐标分别为 x_1、x_2、x_3，则由（2.2）式可知

$$\begin{aligned}\text{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) &= \text{Prj}_l\,\overrightarrow{AC}=x_3-x_1\\ &=(x_3-x_2)+(x_2-x_1)\\ &=\text{Prj}_l\,\overrightarrow{BC}+\text{Prj}_l\,\overrightarrow{AB}\\ &=\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_2+\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_1\end{aligned}$$

即

$$\text{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_1+\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_2.$$ 证毕

推论 由定理 2 可推广到有限个矢量. 即

$$\text{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_1+\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_2+\cdots+\text{Prj}_l\boldsymbol{a}_n.$$

2 矢量的坐标表示法

为了矢量进一步应用，下面引入矢量的坐标表示法，使矢量运算代数化.

设空间直角坐标系，在正x轴、正y轴、正z轴方向上各取单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，这三个矢量称为坐标系的三个基本单位矢量（见图7-17）.

设$\boldsymbol{a}$量以坐标原点为始点的矢量，其终点为$M(x,y,z)$. 常称这种以坐标原点为始点的矢量$\overrightarrow{OM}$为矢经. 由图7-17可得

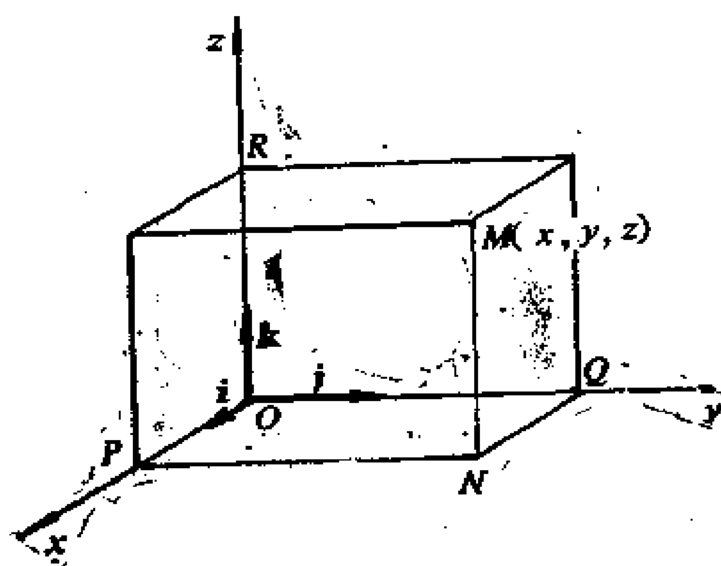


图 7-17

$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}. \qquad (2.6)$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}.$$

在(2.6)式中，x_2-x_1、y_2-y_1、z_2-z_1分别是矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$在Ox轴、Oy轴、Oz轴上的投影．由于矢量平移后，它在轴上的投影不变，所以一个矢量平行移动后，这个矢量的坐标不会改变．如果矢量是矢径$\overrightarrow{OM}$，这时矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标恰好是M点的坐标．在一般情况下矢量坐标是其终点的坐标减去起点的坐标．

设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

根据矢量运算规律可以得到$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$、$\lambda\boldsymbol{a}$的坐标表达式

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}$$
$$=\{a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z\}.$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

例1　设　$\boldsymbol{a}=\{1,-1,0\}$．$\boldsymbol{b}=\{-2,3,1\}$、$\boldsymbol{c}=\{2,-6,-4\}$，

求证　$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{c}$.

证明

$$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=3\{1,-1,0\}+2\{-2,3,1\}$$
$$=\{3-4,\ -3+6,\ 0+2\}$$
$$=\{-1,3,2\}.$$

由于

$$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

根据二矢量平行的充分必要条件(2.1)，可知$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{c}$.

证毕

3　矢量的模与方向余弦

矢量可以用其模和方向加以确定．为简化计算，下面给出矢量的模与方向的坐标表达．

设矢量　$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

由矢量的坐标表达及图7-19可以得到矢量$\boldsymbol{a}$的模的坐标表达式

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{2.7}$$

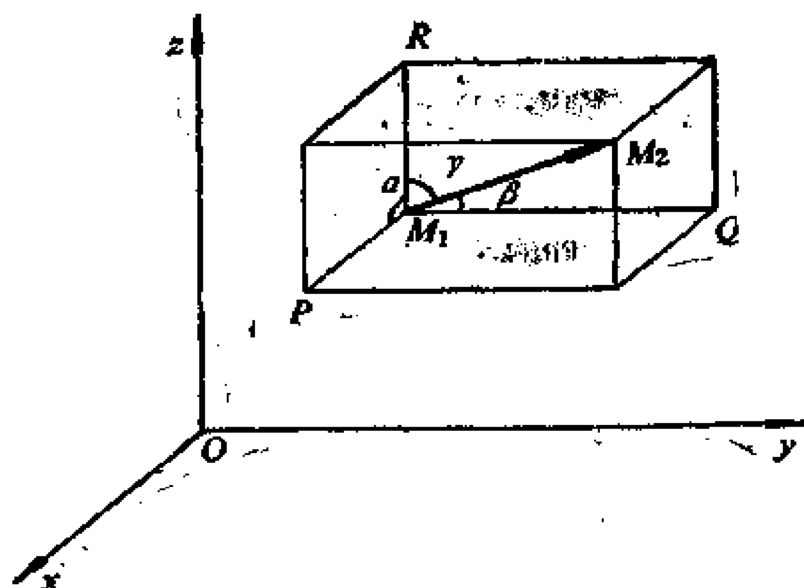


图 7-19

对于矢量$\boldsymbol{a}$的方向，可以用$\boldsymbol{a}$与x轴，y轴，z轴正向的夹角α、β、γ来表示．称$\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，$\beta(0\leqslant\beta\leqslant\pi)$，$\gamma(0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$为$\boldsymbol{a}$的方向角（见图7-19）．

由于矢量坐标就是矢量在坐标轴上的投影，根据定理1（2.3）式，有

$$\left.\begin{aligned}a_x&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\\a_y&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\\a_z&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

公式(2.8)中的$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$称为矢量$\boldsymbol{a}$的方向余弦. 通常用矢量的方向余弦表示矢量的方向. 将(2.7)代入(2.8)中，且当$|\boldsymbol{a}|\neq 0$时，可得

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

式(2.9)称为矢量$\boldsymbol{a}$的方向余弦的坐标表达式.

矢量的方向余弦具有特性：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

易知，矢量$\boldsymbol{a}$的单位矢量$\boldsymbol{a}^0$的坐标表达为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}\tag{2.10}$$

即矢量的方向余弦恰为其单位矢量的坐标.

例2 求矢量$\boldsymbol{a}=\{4,0,-3\}$的模，方向余弦及$\boldsymbol{a}$的单位矢量坐标.

解

$\boldsymbol{a}$的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5$.

$\boldsymbol{a}$的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\qquad \cos\beta=\frac{0}{5}=0,\qquad \cos\gamma=\frac{-3}{5}.$$

$\boldsymbol{a}$的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right\}.$$

四　数量积、矢量积、*混合积

1　两矢量的数量积

（1）数量积的定义

引例　设物体在常力$\boldsymbol{F}$的作用下，沿直线由点M_1移动到点M_2（见图7-20）．则物体位移$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$，由物理学知，力$\boldsymbol{F}$所作功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\ |\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$夹角．

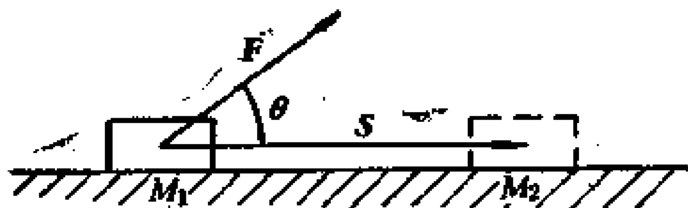


图 7-20

可以看出，功W是数量，它是由两个矢量$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{s}$经上面运算而确定．经数学抽象，定义如下：

定义　两个非零矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的模与它们夹角的余弦的乘积，称为矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的数量积（又称点积，内积）．记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{2.11}$$

其中θ为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角（$0<\theta<\pi$）．

特别，零矢量与任何矢量的数量积为零．

由于$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$是矢量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$是矢量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影，故有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}. \tag{2.12}$$

根据定义，上面引例中，力$\boldsymbol{F}$使物体位移$\boldsymbol{s}$所作的功，可表为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

（2）数量积的运算律

（i）交换律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a};$$

（ii）分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c};$$

（iii）结合律

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\quad(\lambda\text{常数}).$$

证明 （i）、（iii）由定义易证．这里从略．下面只证明（ii）．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\ \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

证毕

（3）数量积的坐标表达式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}).$$

依据数量积的运算律及下列关系：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\tag{2.13}$$

这就是数量积的坐标表达式．

（4）两矢量的夹角及垂直条件

根据数量积的定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

故当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是非零矢量时，有两矢量夹角公式

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}. \tag{2.14}$$

若用坐标表示上式，设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.15}$$

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0. \tag{2.16}$$

由(2.15)，得 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直的坐标表达式为

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0. \tag{2.17}$$

例3 设三点 $A(1, 1, 0)$、$B(2, 2, -4)$、$C(1, 4, -6)$，求 $\angle ABC$。

解 因为

$$\overrightarrow{BA} = \{-1, -1, 4\}, \quad \overrightarrow{BC} = \{-1, 2, -2\},$$

所以

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{(-1)(-1) + (-1) \times 2 + 4 \times (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2^2)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故

$$\angle ABC = \frac{3\pi}{4}.$$

2　两矢量的矢量积

(1)矢量积的定义

引例　设 O 为一杠杆 L 的支点．力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆点 P 处，且 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 夹角为 θ（见图7-21）．由力学规定，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩

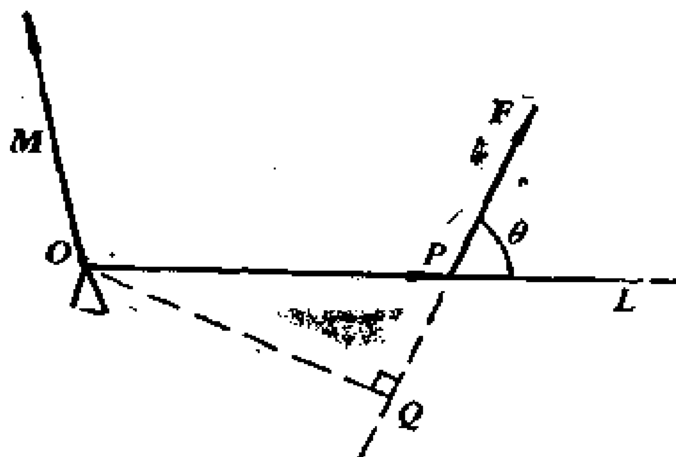


图 7-21

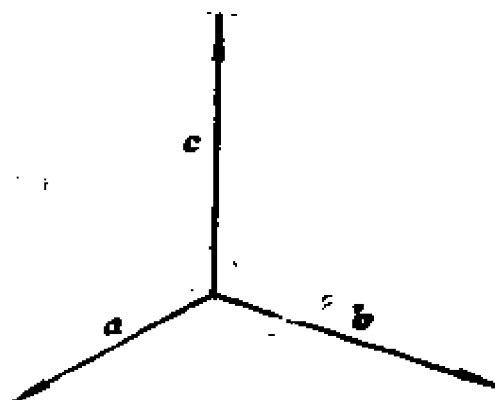


图 7-22

是一矢量$\boldsymbol{M}$，其模为

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{F}|\,|OQ|$$
$$= |\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{OP}|\sin\theta.$$

矢量$\boldsymbol{M}$的方向：$\boldsymbol{M}$垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$所确定的平面，且按$\overrightarrow{OP}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{M}$构成右手系．

可以看出，力矩矢量$\boldsymbol{M}$的模和方向完全由矢量$\boldsymbol{F}$和$\overrightarrow{OP}$所确定．

经数学抽象，给出矢量积的定义如下：

定义 两个非零矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$按下列条件确定一个矢量$\boldsymbol{c}$：

(i) $\boldsymbol{c}$的模为 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

(ii) $\boldsymbol{c}$的方向为：$\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，且按$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$构成右手系（见图7-22）．称$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的矢量积，（又称叉积，外积）．记与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

(2)矢量积的运算律：

(i) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

(ii)分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c};$$

(iii)结合律：设λ为常数；

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

说明 (i)可由定义直接推出，由此可知，矢量积不满足交换律．应予以注意．

(iii)可按$\lambda>0$，$\lambda<0$，$\lambda=0$分别用定义直接推出．

(ii)的证明较繁，这里略去不证．

(3)矢量积的坐标表达式．

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{y}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$

则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}),$$

依据矢量积的运算律及下列关系：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

可得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}. \tag{2.18}$$

为便于记忆，可利用行列式表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{2.19}$$

这就是矢量积的坐标表达式．

(4)两矢量的平行条件

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零矢量，且

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

根据矢量积的定义可知：$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \tag{2.20}$$

再由(2.18)或(2.19)，即

$$a_yb_z-a_zb_y=0,\ a_zb_x-a_xb_z=0,\ a_xb_y-a_yb_x=0. \tag{2.21}$$

可得$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$平行的坐标表达式为：

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{2.22}$$

这里，在b_x，b_y，b_z都不等于零时，等式(2.22)与(2.21)有相同意义，而形式上(2.22)较(2.21)简单．在b_x，b_y，b_z中有一个或两个为零时，(2.22)看作是(2.21)的简便写法．如等式

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{0}=\frac{a_z}{b_z},$$

应理解为$a_y=0$，$a_zb_x-a_xb_z=0$．

例4 设$\boldsymbol{a}=\{2,3,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,0,-1\}$，求与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$垂直的单位矢量$\boldsymbol{e}$．

解 因$\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{e}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$平行，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

故所求单位矢量有两个：

$$\boldsymbol{e}=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}).$$

于是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的数量积为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z.$$

从而得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

（3）混合积的几何意义

由于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$都垂直的矢量，它的模等于以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形面积.

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

而$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$等于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的模与此两矢量夹角$\theta$的余弦的乘积，即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\theta.$$

由此可见，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的绝对值等于以矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为棱所构成的平行六面体的体积（见图7-23）．即

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\,|\cos\theta|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.$$

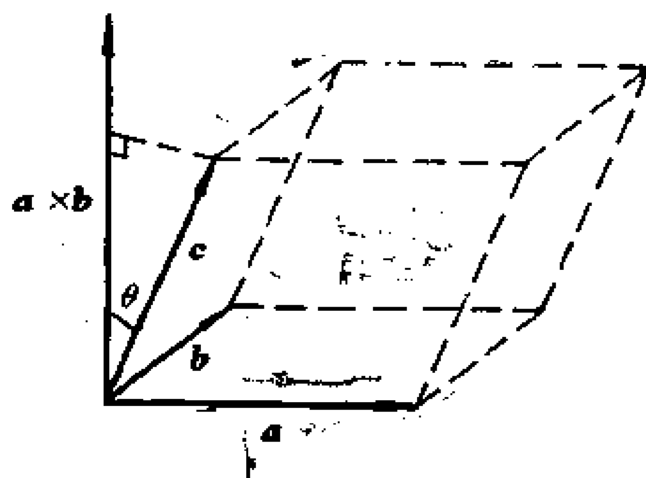


图 7-23

由三矢量的混合积的几何意义，直接可得$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体体积为零的充分必要条件，从而可得三矢量共面的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

所谓一些矢量共面是指存在一个平面，使这些矢量都平行于这个平面.

例6 推导四点$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$，$D(x_4,y_4,z_4)$共面的条件.

解 A、B、C、D四点共面等价于三矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$共面.

由于 $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$,

$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$,

$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1\{$.

根据三矢量共面的充分必要条件，即得四点A、B、C、D共面的充分必要条件为：

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=0.$$

§3 平面及其方程

一 曲面方程的概念

在空间解析几何中，任何曲面都可以看作是点的几何轨迹，在这意义下，如果曲面S与三元方程

$$F(x,y,z)=0. \tag{3.1}$$

有如下面关系：

(i)曲面S上任一点的坐标都满足方程

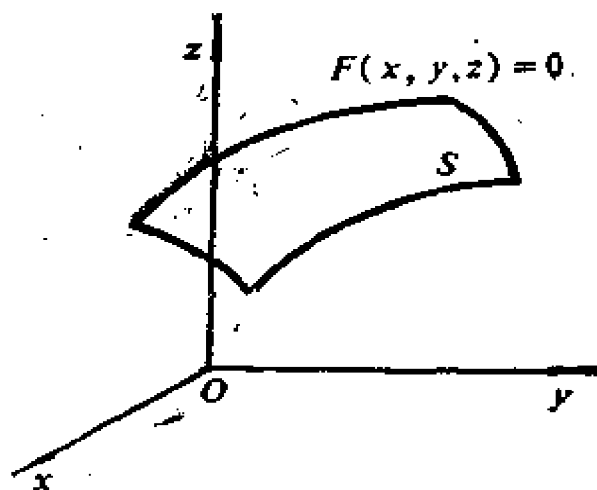


图 7 24

$$F(x,y,z)=0;$$

(ii)不在曲面S上的点的坐标，都不满足方程

$$F(x,y,z)=0,$$

则称方程$F(x,y,z)=0$为曲面S的方程．而曲面S称为方程$F(x,y,z)=0$的图形（图7-24）．

下面举例建立几个常见的曲面的方程．

例1 设点$A(2,0,-1)$和$B(1,-1,2)$，求线段AB的垂直平分面的方程．

解 由题意知，所求平面就是与点A、B等距离点的几何轨迹．

设所求平面上任一点为$M(x,y,z)$．由于

$$|AM|=|BM|,$$

有

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

化简得到方程：

$$2x+2y-6z+1=0. \tag{1}$$

不难看出，平面上的点满足方程，而不在平面上的点不满足方程．故所得方程就是AB的垂直平分面方程．

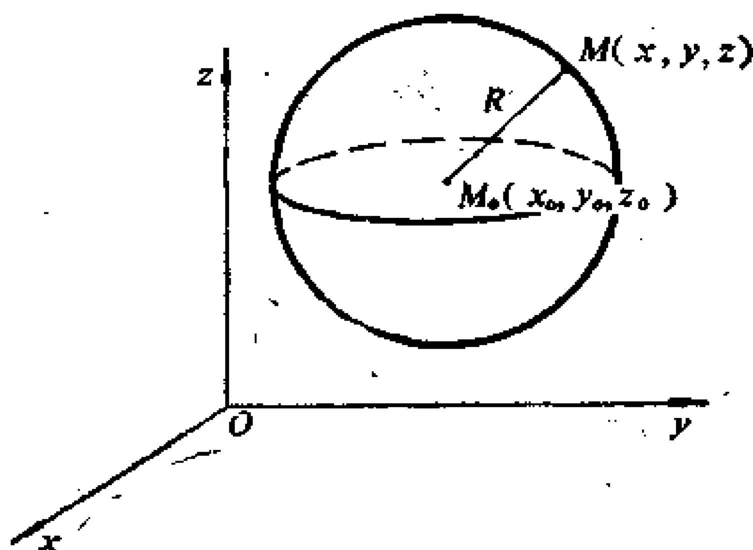


图 7-25

例2 已知球心坐标为$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R，试建立球面方程.

解 设所求球面上任一点为$M(x, y, z)$（图7-25），由于

$$|M_0M| = R,$$

有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2. \qquad (2)$$

易知，球面上的点的坐标满足方程，而不在球面上的点的坐标都不满足方程，所以方程(2)就是所求球面方程.

如果球心在原点，那末$x_0 = y_0 = z_0 = 0$，从而球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2.$$

由上二例可以看出，作为点的几何轨迹的曲面，可以用它曲面上点的流动坐标的方程来表示. 反之，变量x、y和z间的方程通常表示一个曲面. 因此，在空间解析几何中关于曲面的研究，有下面两个基本问题：

(i)已知曲面作为点的几何轨迹时，建立曲面的方程.

(ii)已知点的坐标x、y、z的方程，研究方程所表示的曲面的图形.

下面先讨论最简单的曲面——平面.

二　平面的点法式方程

一个平面在空间的位置，是由某些几何条件来确定. 如过不共线的三个点；过一点及一直线；过一点，且与某矢量垂直等等. 但是，许多几何条件常常可以转化为上面最后这个条件. 下面根据这个条件建立平面方程.

任何一个垂直于平面的非零矢量称为平面的法线矢量，简称为法矢量.

设平面π过定点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,其法线矢量为$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$,试建立平面方程.

设$M(x,y,z)$为平面π上任一点，由题设知矢量$\overrightarrow{M_0M}$与平面π的法线矢量$\boldsymbol{n}$垂直（见图7-26）. 因此，$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{M_0M}$的数量积等于零，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

由于$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$, $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$.

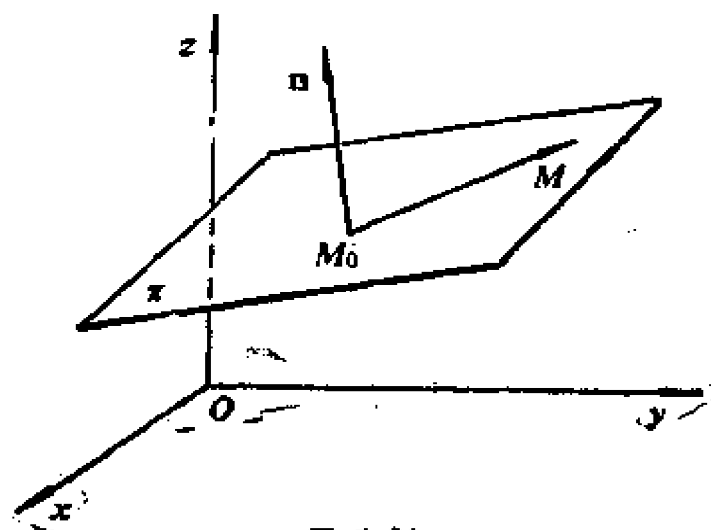


图 7-26

故有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.2)$$

方程(3.2)就是点$M(x, y, z)$在平面π上的充分必要条件．即平面π上的点的坐标满足方程(3.2)．反之，满足方程的x、y、z对应的点必在平面上．故方程(3.2)即为所求的平面方程．

由于平面方程(3.2)是由定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和法线矢量$\boldsymbol{n}=\{A、B、C\}$所确定的，所以方程(3.2)称为平面的点法式方程．

例3 求过点$M_0(1, 0, -2)$且垂直于矢量$\boldsymbol{n}=\{2, -3, -1\}$的平面方程．

解 根据平面的点法式方程(3.2)，所求的平面方程为：

$$2(x-1)-3y-(z+2)=0,$$

即

$$2x-3y-z-4=0$$

为所求平面方程．

例4 求过点$M_1(0, -1, 3)$、$M(1, 1, -2)$、$M_3(-1, 2, -2)$的平面方程．

解 设所求平面的法线矢量为$\boldsymbol{n}$．因为$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$在平面上，故$\boldsymbol{n}$同时垂直矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$，而$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1, 2, -5\}$，$\overrightarrow{M_2M_3}=\{-2, 1, 0\}$，作矢量积：

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}.$$

可取$\boldsymbol{n}=\{1, 2, 1\}$．由平面的点法式方程，得：

$$x+2(y+1)+(z-3)=0,$$

即

$$x+2y+z-1=0$$

为所求平面方程.

例5 一个平面通过z轴，及点$M_0(2,4,-1)$求平面方程.

解 设所求平面法线矢量为$\boldsymbol{n}$，因为$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OM_0}$，作矢量积：

$$\boldsymbol{k}\times\overrightarrow{OM_0}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 4 & -1\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$$

可取$\boldsymbol{n}=\{2,-1,0\}$.由平面的点法式方程，得：

$$2(x-2)-(y-4)=0,$$

即
$$2x-y=0$$

为所求平面方程.

由以上例题可以看出，利用点法式方程求平面方程的关键是寻找平面上一个点及平面的法线矢量.

三 平面的一般式方程

将平面的点法式方程(3.2)化简，即得x，y，z的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3.3}$$

其中$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，方程(3.3)称为平面的一般式方程.

由此可得下面定理：

定理1 平面方程是x,y,z的一次方程.

反之，定理1的逆定理也成立.

定理2 任何一个x,y,z的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(其中A，B，C不全为零)的图形是一个平面.

证明 任取满足方程的一组解(x_0,y_0,z_0)，代入方程，有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3.4}$$

将(3.3)与(3.4)相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

此方程为平面的点法式方程，即过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，法线矢量为$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$的平面方程. 证毕

对于特殊的三元一次方程，对应的平面有特定的位置.

当$D=0$时，方程(3.3)成为$Ax+By+Cz=0$，它表示过原点的平面.

当$A=0$时，方程(3.3)成为$By+Cz+D=0$，该平面的法线矢量$\boldsymbol{n}=\{0,B,C\}$与x轴垂直. 故平面与x轴平行。同理当$B=0$，或$C=0$时，方程对应的平面分别与y轴、z轴平行.

当$A=B=0$时，方程(3.3)成为$Cz+D=0$，该平面法线矢量$\boldsymbol{n}=\{0,0,C\}$与z轴平行. 故平面与xoy面平行. 同理当$B=C=0$，或$C=A=0$，方程对应平面分别与yoz面，zox面平行.

当$A=D=0$时，方程(3.3)成为$By+Cz=0$，该平面法线矢量$\boldsymbol{n}=\{0,B,C\}$与x轴垂直，又因平面过原点，故平面为过x轴的平面. 同理，当$B=D=0$或$C=D=0$时，方程对应的平面依次为过y轴，过z轴的平面.

例6 一平面通过y轴，且垂直于平面$x+y+z=0$，求它的方程.

解 因为平面通过y轴，所以$B=D=0$，可设所求平面方程为

$$Ax+Cz=0.$$

又因该平面与已知平面垂直，故它们法线矢量也互相垂直，有

$$A+C=0,$$

即

$$C=-A.$$

代入方程，得

$$x-z=0$$

为所求平面方程.

四　平面的截距式方程

在平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

中，若A、B、C、D均不为零，则所对应的平面不平行于任一坐标轴，且不过原点. 这样，方程可化为

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1.$$

记　$a=-\frac{D}{A}$，$b=-\frac{D}{B}$，$C=-\frac{D}{C}$. 则上方程化为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3.5)$$

方程(3.5)称为平面的截距式方程. a，b，c 分别称为平面在x,y,z轴上的截距（见图7-27）. 截距可正，可负。

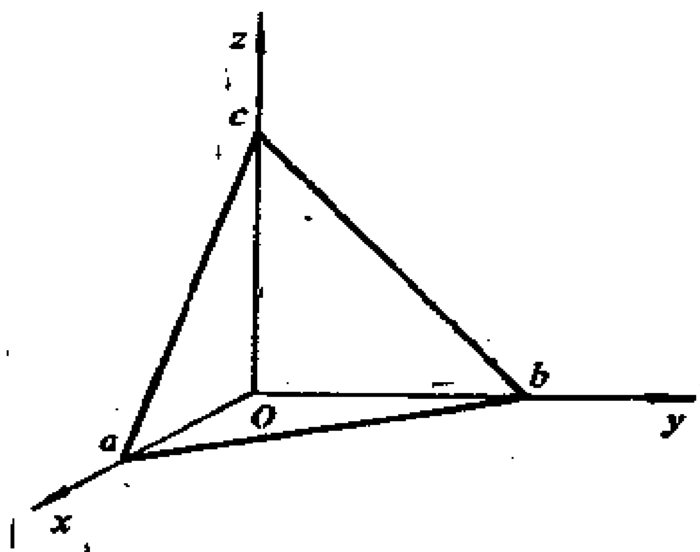


图 7-27

例7　写出平面方程

$$3x+y-2z-6=0$$

的截距式方程.

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\ |\boldsymbol{n}_2|}$$

$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.6)$$

公式(3.6)称为两平面的夹角公式.

两平面的垂直，平行条件，可借助于两平面的两个法线矢量关系得到如下结论.

（1） 两平面π_1，π_2垂直的充分必要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.7)$$

（2） 两平面π_1，π_2平行的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.8)$$

例8 求平面$x+y-4z+2=0$与$x-2y+2z=0$的夹角.

解 取二平面的法线矢量为

$$\boldsymbol{n}_1=\{1,1,-4\},\qquad \boldsymbol{n}_2=\{1,-2,2\}.$$

设二平面夹角为θ，由公式(3.6)得

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\ |\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1-2-8|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

例9 设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面π：$Ax+By+Cz+D=0$外的一点，求点M_0到平面π的距离d（见图7-29）.

解 在平面π上任取一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，并作π的法线矢量$\boldsymbol{n}$．由图7-29，且考虑到$\overrightarrow{M_1M_0}$与$\boldsymbol{n}$夹角可能为钝角. 所以M_0到平面π的距离为

$$d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|=|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}^0|$$

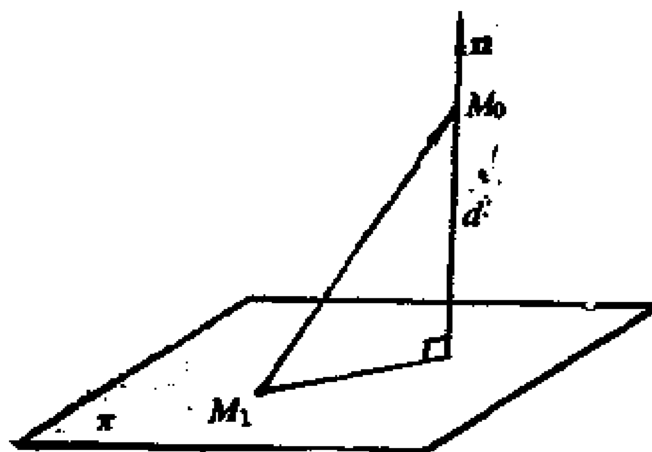


图 7-29

其中$\boldsymbol{n}^0$为$\boldsymbol{n}$的单位矢量，而$\overrightarrow{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$，

$$\boldsymbol{n}^0=\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\}.$$

所以

$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}^0=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}[A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)$$
$$+C(z_0-z_1)].$$

由于　$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，有

$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}^0=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由此得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2-C^2}}. \qquad (3.9)$$

公式(3.9)称为点$M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离公式.

§ 4　空间直线及其方程

一　空间曲线方程的概念

空间曲线可以看作是空间两个曲面的交线.

设空间两个曲面S_1，S_2的方程分别为

$$F(x,y,z)=0\text{，}\quad G(x,y,z)=0\text{.}$$

它们的交线为C. 由于曲线C上任何点的坐标同时满足两个曲面方程，所以，曲线C的坐标应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{4.1}$$

反之，如果点M不在曲线C上，那末点M不能同时在两个曲面上. 所以，点M的坐标不满足方程组(4.1). 因此，空间曲线 C 可以用方程组(4.1)来表示. 方程组(4.1)称为空间曲线C的一般方程（见图7-30）.

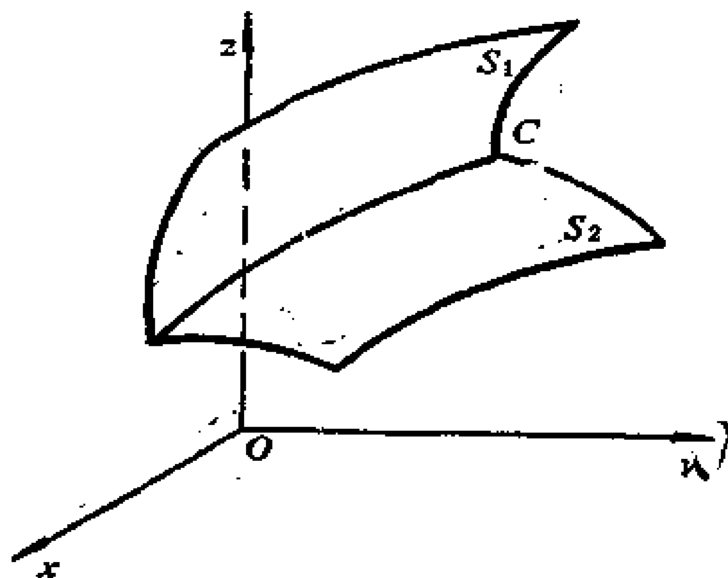


图 7-30

例如，球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$z=h$　$(0<h<R)$相交的曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=h. \end{cases}$$

它表示在$z=h$面上的以(0, 0, h)为圆心，以$r=\sqrt{R^2-h^2}$为半径的圆（见图7-31）.

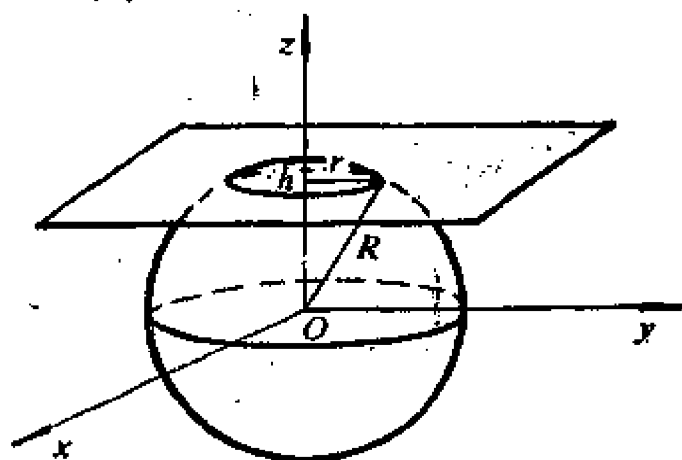


图 7-31

下面先讨论空间最简单的曲线——直线.

二 直线的标准式方程与参量式方程

空间直线位置的确定有不同的几何条件. 如过两定点；过一定点，且平行于某矢量等. 下面用后一条件来建立空间直线的方程.

任何一个平行于直线的非零矢量，都称为该直线的方向矢量.

设直线L过定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$. 且以非零矢量$\boldsymbol{S}=\{m, n, P\}$为方向矢量，试建立直线方程.

设点$M(x, y, z)$为直线L上任一点，那末，矢量$\overrightarrow{M_0M}$与直线L的方向矢量$\boldsymbol{S}$平行（见图7-32），所以，两矢量对应坐标成比例，由于$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$，于是有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{4.2}$$

方程(4.2)是点$M(x, y, z)$在直线L上的充分必要条件. 所以，

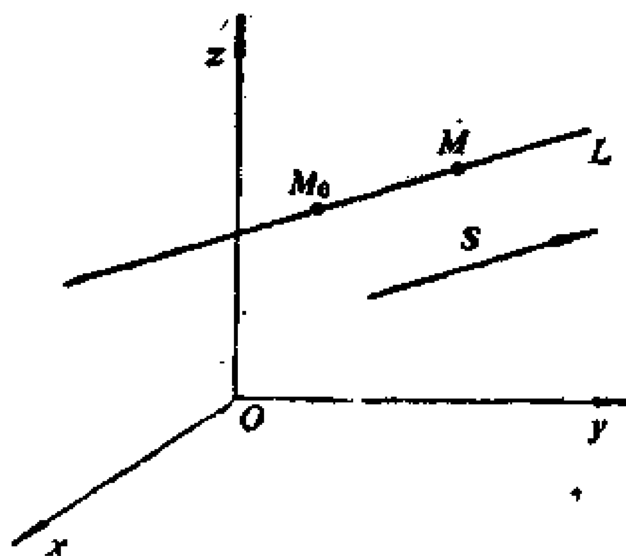


图 7-32

方程(4.2)就是直线L的方程，通常称方程(4.2)为直线的标准式方程.

直线的任一方向矢量S的坐标m，n，p称为直线的一组方向数. 应当指出，由于直线的方向矢量不唯一，故直线的方向数亦不唯一.

直线方程还有另外的形式，如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

其中t为参量，那末，有

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{4.3}$$

方程组(4.3)称为直线的参量式方程.

例1 设有过点$M_0(1,2,-3)$，分别以$S_1=\{1,-2,1\}$，$S_2=\{2,0,-1\}$为方向矢量的两条直线，试建立它们的标准式方程.

解 由直线的标准式方程，可知两条直线的方程为

L_1 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}.$$

L_2 $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{-1}.$$

注意，这里L_2方程应理解为两个平面

$$y-2=0, \quad \frac{x-1}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

的交线.

三 直线的一般式方程

空间直线L可以看作是两个平面π_1，π_2的交线（见图7-33）．如果两个平面π_1和π_2的方程分别为$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那末空间直线L上任何点的坐标应同时满足这两个平面方程，即应满足方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases} \tag{4.4}$$

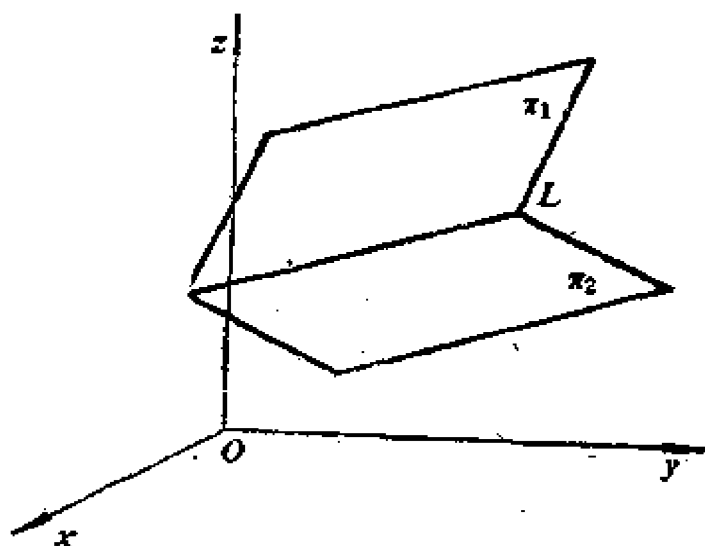


图 7-33

反之，如果点M不在直线上，那末它不可能同时在π_1和π_2上，所以它的坐标不满足方程组(4.4)，因此，直线L可用方程组(4.4)表示，方程组(4.4)称为空间直线的一般式方程（或称面交式方程）.

例2 将直线L的一般式方程

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x+3y-z+4=0. \end{cases}$$

化为直线的标准式方程和参量式方程.

解 先求直线L上一点（x_0, y_0, z_0），可设$x_0=1$，代入方程组，得

$$\begin{cases} y_0+z_0=-2, \\ 3y_0-z_0=-6. \end{cases}$$

解得$y_0=-2$，$z_0=0$，得L上一点（1，-2，0）.

再求直线L的方向矢量$\boldsymbol{S}$，由于两平面交线与两平面的法线矢量$\boldsymbol{n}_1=\{1, 1, 1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2, 3, -1\}$都垂直，所以可取

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

因此，所求直线L的标准式方程为

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}.$$

令

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}=t,$$

则得直线L的参量式方程

$$\begin{cases} x=1-4t, \\ y=-2+3t, \\ z=t. \end{cases}$$

四 两直线的相互位置

两直线方向矢量的夹角，称为两直线的夹角（通常指锐角）。

设二直线方程

$$L_1:\quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2:\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

下面确定两直线的夹角.

由于直线 L_1 和 L_2 的方向矢量为 $\boldsymbol{S}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$和 $\boldsymbol{S}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$. 根据两矢量夹角余弦的公式，可得直线$L_1$和$L_2$的夹角 φ 的公式.

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{4.5}$$

由两矢量的垂直，平行条件，可推得下列结论：

（1） 两直线L_1，L_2垂直的充分必要条件为

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

（2） 两直线L_1，L_2平行的充分必要条件为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

例3 求直线L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$与直线

L_2：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+\frac{3}{2}}{0}$的夹角.

解 直线L_1，L_2的方向矢量分别为$\boldsymbol{S}_1=\{1, 0, -1\}$，$\boldsymbol{S}_2=\{-1, -1, 0\}$，由直线的夹角公式，得

$$\cos\varphi=\frac{|1\times(-1)+0\times1+(-1)\times0|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

故直线L_1，L_2的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

五　直线与平面的夹角

直线和它在平面上投影直线的夹角，称为直线与平面的夹角φ，通常规定$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$（见图7-34）.

设直线L的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

平面π的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

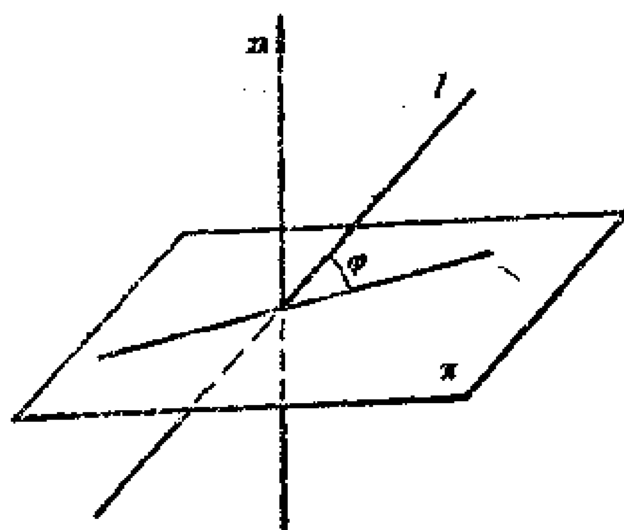


图 7-34

由于直线L的方向矢量$S=\{m, n, p\}$，与平面π的法线矢量$n=\{A, B, C\}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-\varphi$，或$\frac{\pi}{2}+\varphi$，又因

$$4(x+1)+3y+(z-1)=0,$$

即

$$4x+3y+z+3=0$$

为所求平面方程.

§5 曲面及其方程

本节将围绕着解析几何中两个基本问题——已知曲面，建立曲面的方程；已知曲面的方程，研究曲面的形状，讨论常见的曲面，如柱面，旋转面等.

一 柱面

先分析一个具体柱面方程及其图形，然后再介绍柱面的定义及其方程的特征.

例1 考查方程 $x^2+y^2=R^2$ 所表示的曲面.

解 已知方程$x^2+y^2=R^2$在xoy面上表示圆心在原点，半径为R的圆. 然而，在空间直角坐标系中，由于方程$x^2+y^2=R^2$中不含坐标z，说明所表示的曲面上的点与坐标z无关，只要点的坐标x，y满足方程，那末点(x, y, z)就在曲面上. 这就是说，凡是通过xoy面上圆$x^2+y^2=R^2$，且平行于z轴的直线，都在这曲面上. 因此，这曲面是由平行于z轴的直线，沿xoy面上圆$x^2+y^2=R^2$平行移动而形成的. 该曲面称为圆柱面(见图7-35)，其中xoy面上的圆称为圆柱面的准线，平行于z轴的直线称为圆柱面的母线.

一般地，由平行于定直线，并沿曲线C移动的直线L形成的轨迹称为柱面. 曲线C称为柱面的准线，动直线L称为柱面的母线.

上例可知，不含z的方程$x^2+y^2=R^2$在空间直角坐标系中表示的柱面，其准线为xoy面上的圆$x^2+y^2=R^2$，它的母线平行z

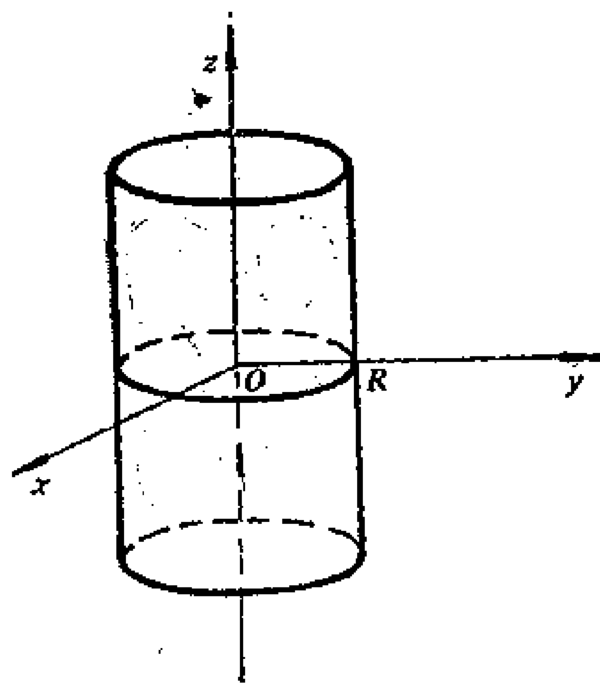


图 7-35

轴.

类似的，如方程$x^2+z^2=1$表示准线是zox面上的圆$x^2+z^2=1$，母线平行于y轴的圆柱面（见图7-36）. 又如方程$z=y^2$表示准线为yoz面上的抛物线，母线平行于x轴的抛物柱面(见图7-37).

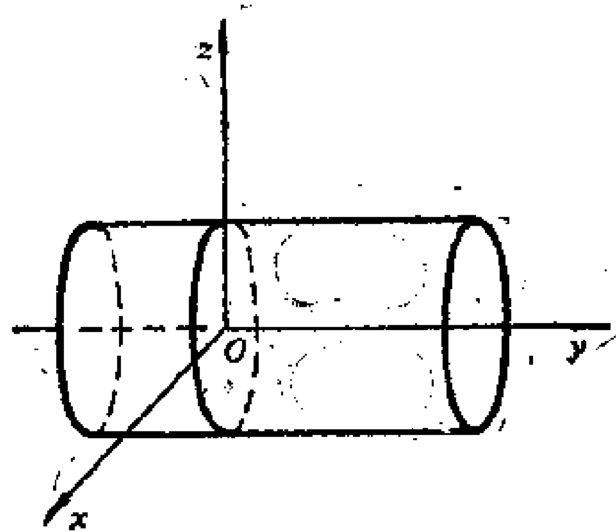


图 7-36

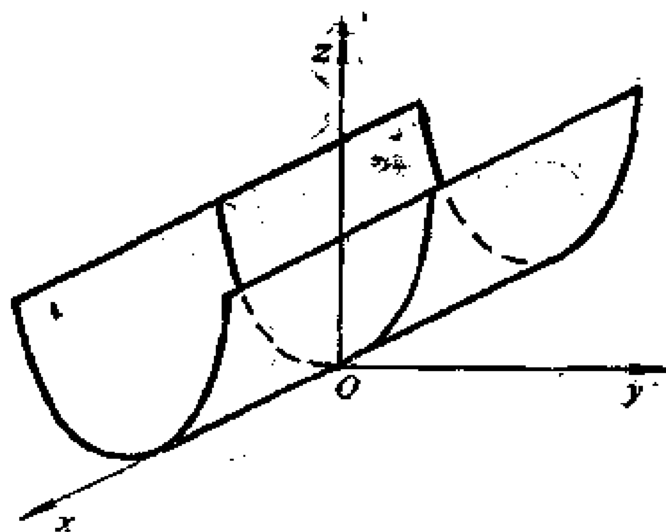


图 7-37

一般地，只含x，y，而缺z的方程$F(x,y)=0$在空间直角坐标系中表示准线为xoy面的曲线$F(x,y)=0$，母线平行于z轴的柱面（见图7-38）. 类似，只含x，z，而缺y的方程$G(x,z)=0$，表示准线为zox面上的曲线$G(x,z)=0$，母线平行于y轴的柱面. 只含y，z，而缺x的方程$H(y,z)=0$，表示准线为yoz面上的曲线$H(y, z)=0$，母线平行x轴的柱面.

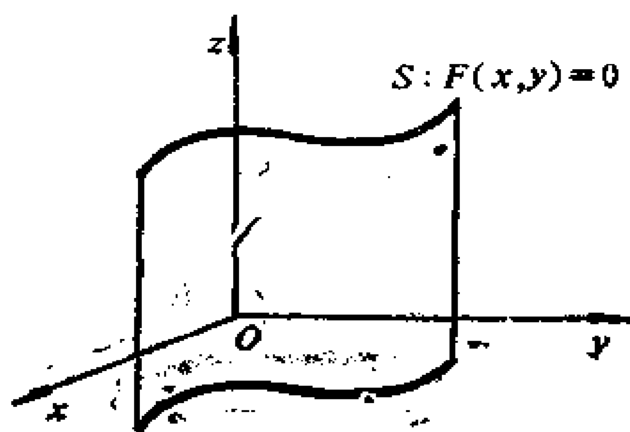


图 7-38

二 旋转面

先讨论一个特殊的例子——圆锥面. 它是由直线L绕另一条与L相交定角α的定直线旋转一周，所得的旋转曲面称为圆锥面. 两

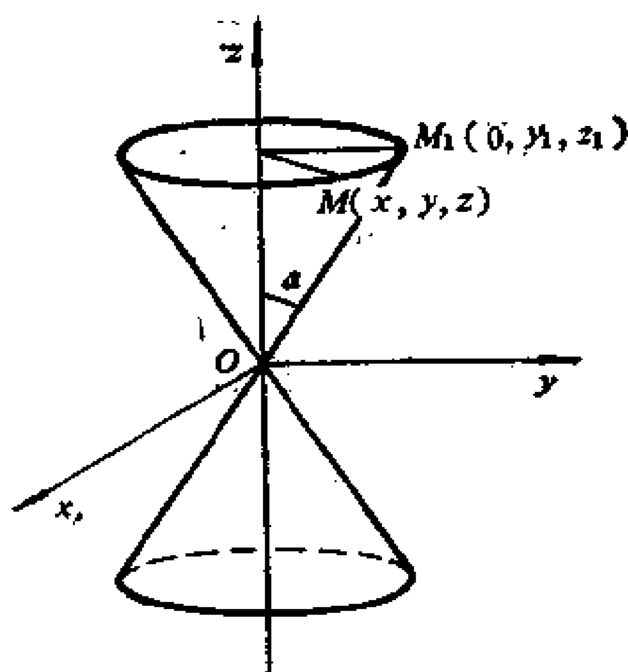


图 7-39

直线的交点称为圆锥的顶点，两直线的交角α称为圆锥的半顶角.

例2 一直线绕其平面上一定直线旋转，形成圆锥面，其半顶角为α（见图7-39），试建立圆锥面方程.

解 选择坐标系如图7-39. 锥顶点为坐标原点，定直线为z轴.

设动直线开始位于yoz面上，$M_1(0, y_1, z_1)$是这直线上一点，那末，有

$$z_1 = y_1 \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (5.1)$$

当动直线绕z轴旋转，且点M_1旋转到锥面上点$M(x, y, z)$时，由于点M的坐标x，y，z有关系：

$$z = z_1,$$

又M点到z轴距离：

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|.$$

即
$$y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

将 $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$，$z_1 = z$ 代入(5.1)得

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg}\alpha,$$

令$a=\text{ctg}\alpha$，得

$$z^2=a^2(x^2+y^2) \tag{5.2}$$

方程（5.2）是点$M(x, y, z)$在锥面上充分必要条件，称（5.2）为顶点在原点，直线绕z轴旋转的锥面方程. 类似，方程

$$(z-z_0)^2=a^2(x^2+y^2),$$

表示顶点在（0，0，z_0），直线绕z轴旋转的锥面. 同理还可推出的其他坐标轴为旋转轴的锥面方程. 一般情形，一平面曲线绕同一平面一条定直线旋转一周所成的曲面，称为旋转曲面，其定直线称为旋转曲面的轴.

用同样的方法，可得一般旋转曲面的方程.

设yoz面上一已知曲线C：$F(y,z)=0$，将曲线C绕z轴旋转一周，就得到一个以z轴为轴的旋转曲面（图7-40）. 仿上例分析方法，只要将yoz面上曲线$F(y,z)=0$中，保持z不变，将y用$\pm\sqrt{x^2+y^2}$替换，即得到由yoz面上的已知曲线$F(y,z)=0$，绕z轴旋转的曲面方程

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

同理，若将yoz面上的曲线$F(y,z)=0$绕y轴旋转所得的旋转曲面方程为

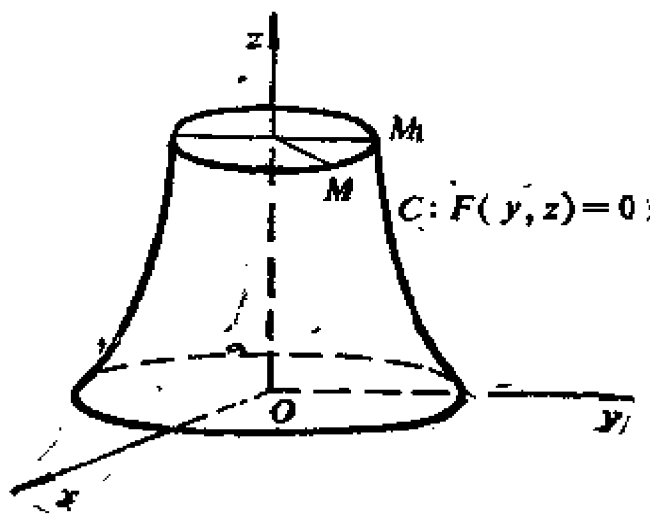


图 7-40

$$F(y,\ \pm\sqrt{z^2+x^2})=0.$$

例 3 将抛物线$\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转所成的旋转曲面方程，是将yoz面上曲线$y^2=2pz$中的 z 保持不变，而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 替换，即得

$$x^2+y^2=2pz$$

这旋转曲面是由抛物线旋转而得的，故称为旋转抛物面.

例 4 将直线$\begin{cases} y=y_0+z \\ x=0 \end{cases}$绕 y 轴旋转所成的旋转曲面，是将yoz面上直线$y=y_0+z$中的 y 保持不变，而 z 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 替换，即得

$$(y-y_0)^2=x^2+z^2.$$

这就是顶点在（0，y_0，0），以 y 轴为旋转轴的锥面方程.

§6 二次曲面

在平面解析几何中，将二元二次方程对应的曲线，统称二次曲线. 类似，在空间解析几何中，将三元二次方程所表示的曲面，统称为二次曲面.

本节主要讨论给定三元二次方程如何确定其曲面的形状. 为了获得方程的图形，通常用"平行截割法"来讨论，就是用平行于坐标面的平面族截割曲面，由所截出的平行的曲线族的形状，综合分析，来确定曲面的形状.

一 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>0,\ b>0,\ c>0). \quad (6.1)$$

所表示的曲面，称为椭球面．

下面用"平行截割法"来讨论．

我们用与xoy面平行的平面来截这个曲面．首先用坐标面$z=0$截割，截出的曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

这是一个椭圆，再用$z=h$截割曲面，截出曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

当$h^2<c^2$，即$-c<h<c$时，截出的曲线是一个椭圆．
当$h^2=c^2$，即$h=\pm c$时，截出一个点$(0,0,c)$或$(0,0,-c)$，
当$h^2>c^2$，这时，方程（6.1）的右端小于零，故平面$z=h$与曲面（6.1）无交点．

因此，用与xoy面平行的平面与曲面截得一组椭圆．在平面$z=h$截出的椭圆中，当h从0变到c时，该椭圆逐渐变小，最后，变为一个点．同理，当h从0变到$-c$时，所截出的椭圆也逐渐变小．最后，变为一个点．

同样，用与yoz面、zox面平行的两组平面相截，也截出相应的两组椭圆．

综合分析，方程（6.1）所表示的图形如图7-41．

特别，当$a=b=c\neq 0$，则方程（6.1）表示以O点为球心a为半径的球面．当a，b，c中有两个相等时，曲面为旋转面．例如若$a=b\neq c$，则方程（6.1）化为：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

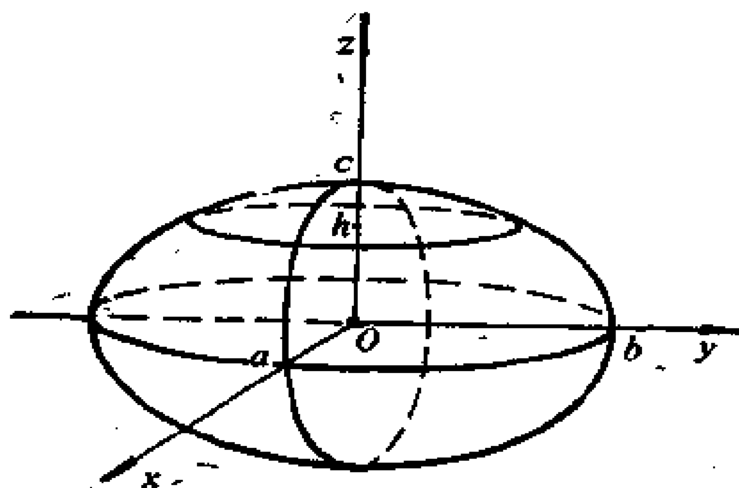


图 7-41

它是由椭圆 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转椭球面（参见§5，二）.

二 抛物面

方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad (p,\ q\ \text{同号}). \qquad (6.2)$$

所表示的曲面，称为椭圆抛物面.

用平行截割法来确定方程(6.2)的图形.

设 $p>0$，$q>0$，用坐标面 $z=0$ 截割这个曲面，得到一个点，即坐标原点 $O(0,0,0)$.

再用 $z=h$ 截此曲面. 当 $h<0$ 时，$z=h$ 与曲面(6.2)无交点，故 $z<0$ 部分无曲面. 当 $h>0$ 时，截出的曲线是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2ph}+\dfrac{y^2}{2qh}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

且 h 越大，椭圆也越大，

再分别用另外坐标面$x=0$，$y=0$截割这曲面，分别得抛物线

$$\begin{cases} y^2=2qz, \\ x=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0. \end{cases}$$

且它们都是开口向正 z 轴方向，顶点在原点的抛物线.

综合分析，可知椭圆抛物面如图7-42.

特别，当$p=q$时，方程（6.2）化为

$$x^2+y^2=2pz, \qquad (6.3)$$

此为常用的旋转抛物面.

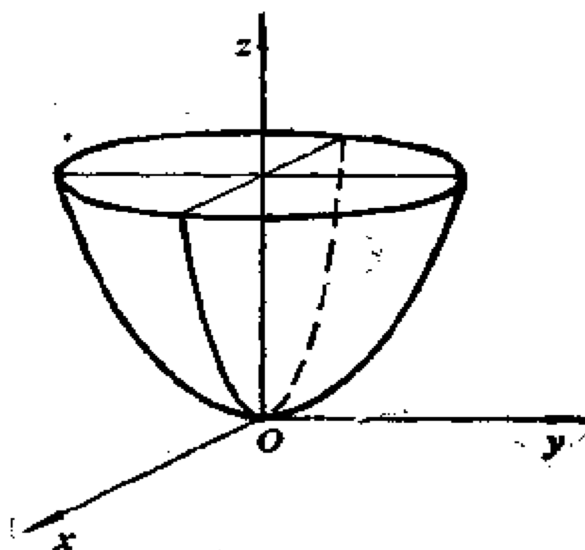


图 7-42

由方程

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q\text{同号}). \qquad (6.4)$$

所表示的曲面称为双曲抛物面（或称鞍形面）

同样，当$p>0$，$q>0$时，可用平行截割法得到曲面如图7-43. 这个方程的图形由读者自行分析解决.

三 双曲面

由方程

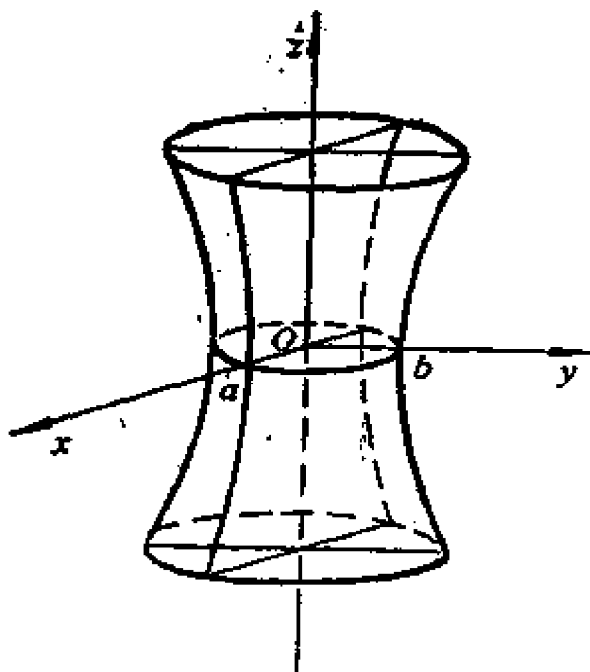


图 7-44

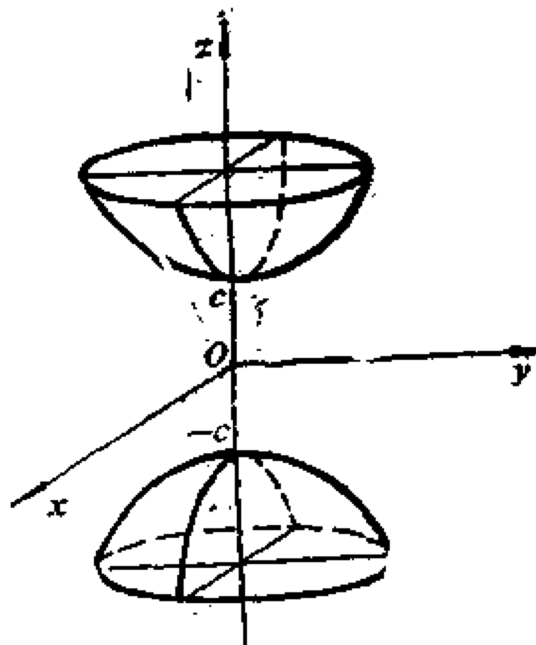


图 7-45

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad (a>0,b>0,c>0). \tag{6.6}$$

仍用与xoy面平行的平面截割这个曲面，截出的曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h.\end{cases}$$

可以看出，当$-c<h<c$，平面与曲面无交点；当$h=\pm c$时，截出点分别为$(0, 0, c)$，$(0, 0, -c)$；当$|h|>c$时，截出的曲线是椭圆，且当$|h|$越大，椭圆越大.

为了更清楚地观察曲面的形状，再分别用$x=0$，$y=0$截曲面，分别得双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0.\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0.\end{cases}$$

综合分析，双叶双曲面如图7-45.

四 空间立体图形作法举例

前面讨论了柱面、旋转面以及二次曲面的方程与图形．今后常常需要作出由几个曲面所围成的立体图形．下面举例说明立体图形的作法．

例 5 作出由平面$x+y+z=2$，$2x+y=2$，和坐标面$x=0$、$y=0$、$z=0$所围成的立体图形．

解 先作平面$x+y+z=2$，在x，y，z轴上截距均为 2，得到平面ABC．

再作平面$2x+y=2$．此平面在x，y轴上截距分别为 1，2，且平行z轴．即由点D(1，0，0)引平行z轴的直线交AC于E，又知点B(0，2，0)亦在此面上，故连接EB，即得此平面DBE．

综合分析，知所求立体为$DBOCE$（见图7-46）．

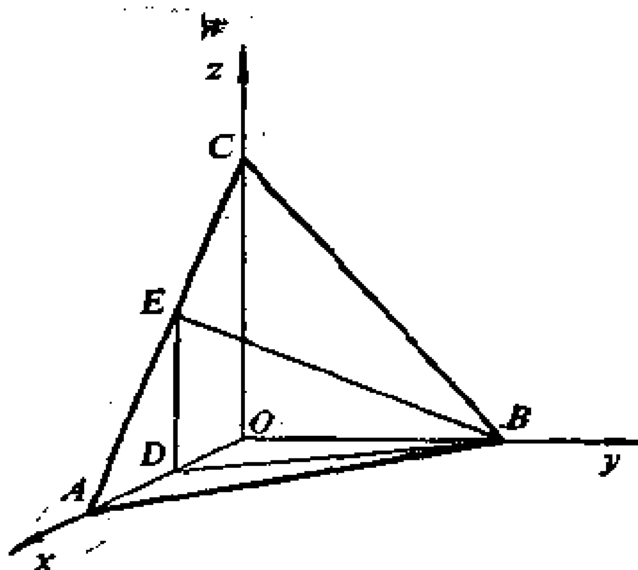


图 7-46

例 6 作出由曲面$z=\sqrt{3-x^2-y^2}$，$(x^2+y^2)=2z$所围成的立体的图形．

解 曲面$z=\sqrt{3-x^2-y^2}$是以原点（0，0，0）为球心，$\sqrt{3}$为半径的上半球面．

曲面$x^2+y^2=2z$是以z轴为旋转轴的旋转抛物面．由于在yoz

面上为抛物线$y^2=2z$.若取$y=\pm\sqrt{2}$,则$z=1$，得点$A(0,\sqrt{2},1)$，$B(0,-\sqrt{2},1)$. 由此可绘出曲面$x^2+y^2=2z$在yoz上的截出的抛物线AOB，且知以此抛物线绕z轴旋转，即得旋转抛物面.

又由于以上二曲面皆关于坐标面$x=0$、$y=0$对称，故其交线为平行yOx面的圆（图7-47）.

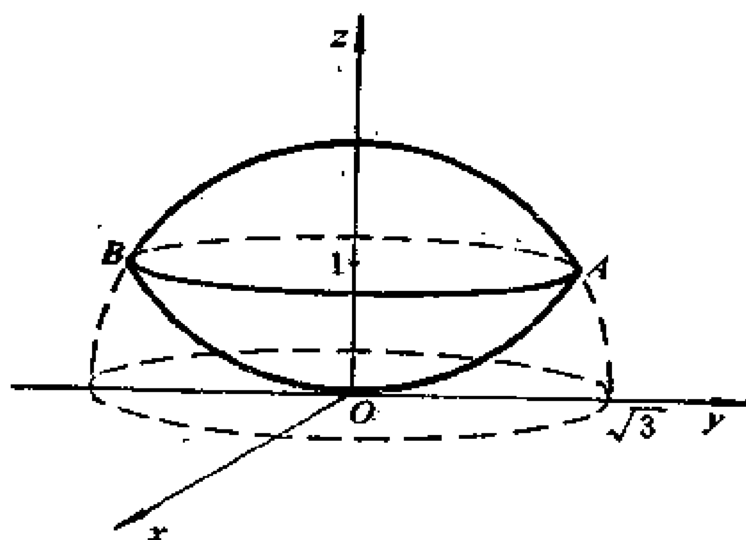


图 7-47

例 7 作出由曲面$3-z=x^2+y^2$，$x=1$，$y=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所围成立体的图形的第一卦限部分.

解 曲面$3-z=x^2+y^2$是由yoz面上的曲线

$$3-z=y^2$$

绕oz轴旋转而成的旋转抛物面. 它与xoy的交线是以原点为中心，$\sqrt{3}$为半径的圆.

$x=1$与$y=1$分别是垂直于ox轴与oy轴的平面。平面$x=1$通过点（1,0,0）；平面$y=1$通过点（0，1，0）. 曲面$3-z=x^2+y^2$，与平面$x=1$，$y=1$及三个坐标面所围成的立体图形在第一卦限部分描绘出来如图7-48所示. 图中$OAECGBFD$所围的区域即为所要求绘出的图形.

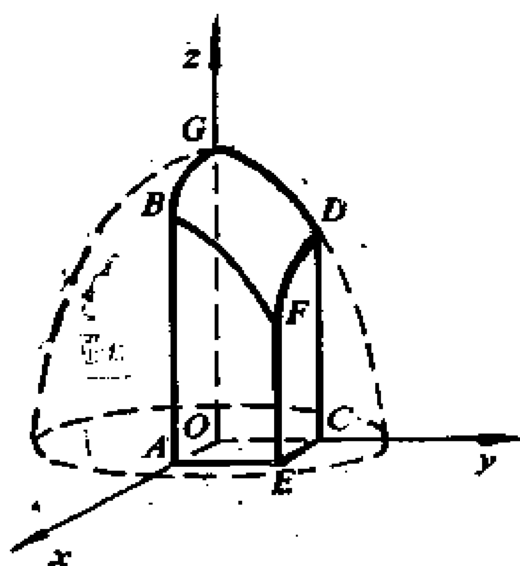


图 7 48

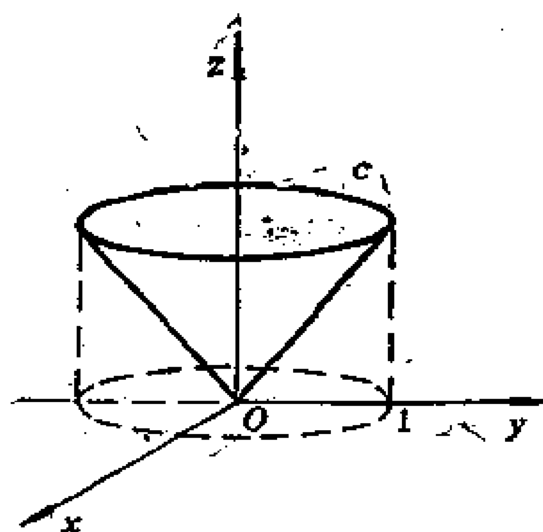


图 7-49

§7 空间曲线及其方程

一 空间曲线的一般方程

在§4,一中，已经介绍了空间曲线及其作为两曲面交线的一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.1}$$

下面举例说明空间曲线的一般方程所表示的曲线.

例1 考查曲线方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

所表示的曲线.

解 方程组中第一个方程表示准线为xoy面上的圆$x^2+y^2=1$. 母线平行z轴的圆柱面.

第二个方程表示顶点在原点以z轴为轴的上半圆锥.

圆柱面与圆锥的交线为平面$z=1$上的圆$x^2+y^2=1$（见图

7-49）.

例2 考查曲线的一般方程

$$\begin{cases} z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \\ x^2-Rx+y^2=0 \end{cases}$$

所表示的曲线。

解 方程组中第一个方程表示上半球面.

第二个方程可变形为

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

它表示母线平行于oz轴的圆柱面。

两个曲面的交线如图7-50.

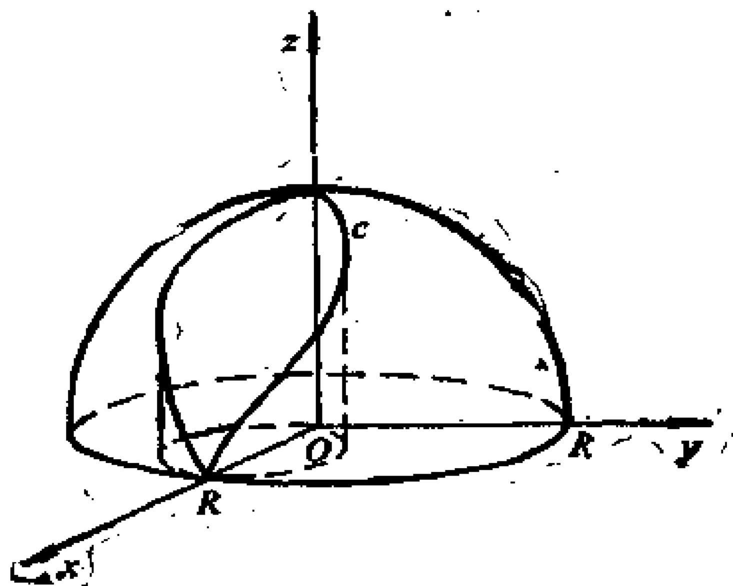


图 7-50

二 空间曲线的参量方程

在§ 4 直线方程部分，介绍了空间直线的参量方程.

一般地，空间曲线也可以用参量方程来表示. 如果曲线上任一点的坐标x，y，z都可以用参量t来表示，即

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{7.2}$$

则随着 t 的变化，便可得到曲线上的全部点. 方程（7.2）称为空间曲线的参量方程。

例 3 设空间一点 $M(x, y, z)$ 在圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上，以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时，又以线速度 v 沿 z 轴正向上升（其中 ω，v 都是常数）. 这种点的几何轨迹称为螺旋线. 试建立螺旋线方程.

解 设时间 t 为参量，当 $t=0$ 时，动点位于 $M_0(R, 0, 0)$，经过时间 t，动点由 M_0 运动到 $M(x, y, z)$（图7-51）. 记 M' 为 M 在 xoy 面上的投影，由于动点 M 在圆柱面上以角速度 ω 旋转，经时间 t，转角为 ωt. 有

$$\begin{cases} x=|OM'|\cos\omega t=R\cos\omega t, \\ y=|OM'|\sin\omega t=R\sin\omega t. \end{cases}$$

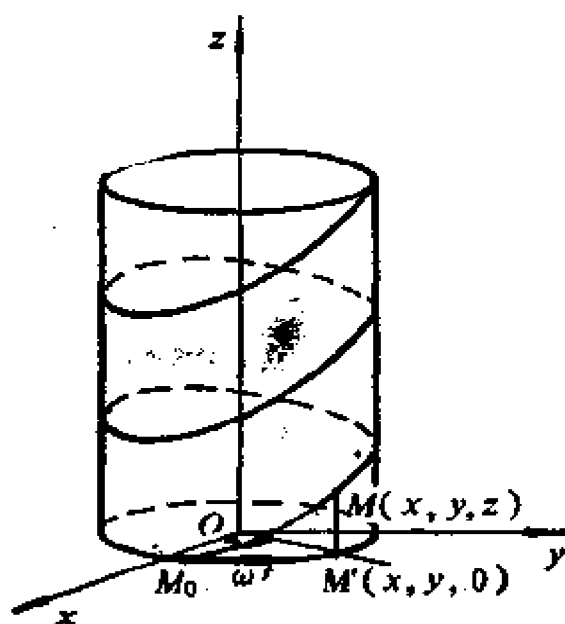


图 7-51

又由于动点的线速度 v 沿 z 轴正向上升，所以有

$$z=M'M=vt.$$

因此，螺旋线的参量方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t, \\ y=R\sin\omega t, \\ z=vt. \end{cases}$$

也可选用其他参量，如令 $\theta=\omega t$. 则以上螺旋线的参量方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\theta, \\ y=R\sin\theta, \\ z=b\theta. \end{cases}$$

这里参量为 θ，数 $b=\dfrac{v}{\omega}$.

三　空间曲线在坐标面上的投影曲线

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.3}$$

下面讨论曲线 C 在坐标面上的投影曲线的方程.

首先，需要明确两个概念.

以空间曲线 C 为准线，以平行于 oz 轴的直线为母线的柱面，称为曲线 C 关于 xoy 面的投影柱面. 投影柱面与相应坐标面 xoy 面的交线称为空间曲线 C 在 xoy 面上的投影曲线（简称曲线 C 在 xoy 面上的投影）（见图7-52）.

为求曲线 C 的投影曲线，关键要求得与该曲线相应的投影柱面方程.

下面求投影柱面方程. 设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.3}$$

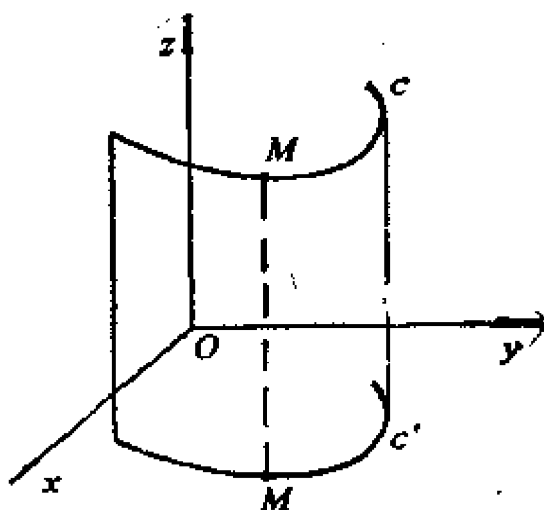


图 7-52

则由方程组(7.3)消去变量 z 后，所得含有 x，y 的方程

$$H(x,y)=0 \qquad (7.4)$$

即为曲线 C 关于 xoy 面的投影柱面方程.

事实上，由于(7.4)是由方程组(7.3)消去 z 所得的结果，而曲线 C 上点的坐标 x，y，z 必满足方程组(7.3)，因此，其前两个坐标 x、y 必满足方程(7.4). 这说明曲线 C 上所有点都在方程(7.4)所表示的曲面上. 又知方程(7.4)表示一个母线平行于 z 轴的柱面. 综上所述可知，方程(7.4)即为曲线 C 关于 xoy 面的投影柱面方程.

由此可得曲线 C 在 xoy 面上的投影曲线为：

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases} \qquad (7.5)$$

同理，若求曲线 C 在 yoz 面(或 zox 面)上的投影曲线，则要消去(7.3)中的 x(或 y)，将所得二元方程与相应的坐标面 $x=0$(或 $y=0$)联立，即得给定曲线 C 在相应坐标面 yoz(或 zox)面的投影曲线方程.

例 3 求空间曲线 C

$$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2-(x^2+y^2). \end{cases}$$

在xoy面上的投影曲线方程.

解 将曲线C的一般方程消去坐标z，得曲线C关于xoy面上的投影柱面方程

$$x^2+y^2=1.$$

故C在xoy面的投影曲线C'为（见图7-53）

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

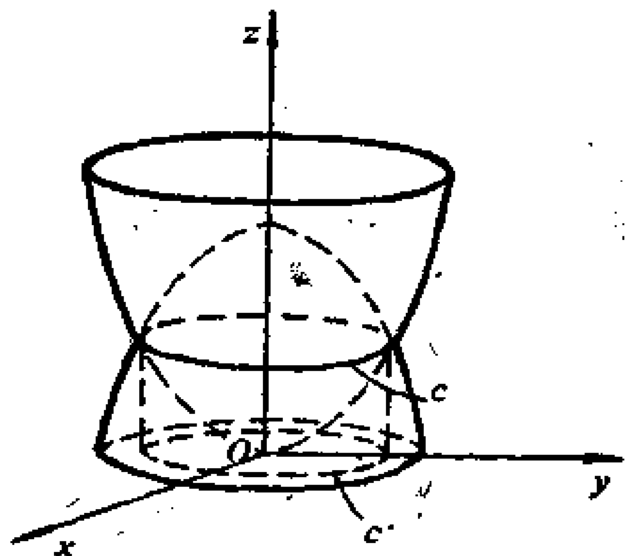


图 7-53

例4 求空间曲线C

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

在xoy面上的投影曲线方程.

解 将曲线C的方程消去坐标z. 得到曲线C关于xoy面上投影的柱面方程：

$$x^2+y^2=2.$$

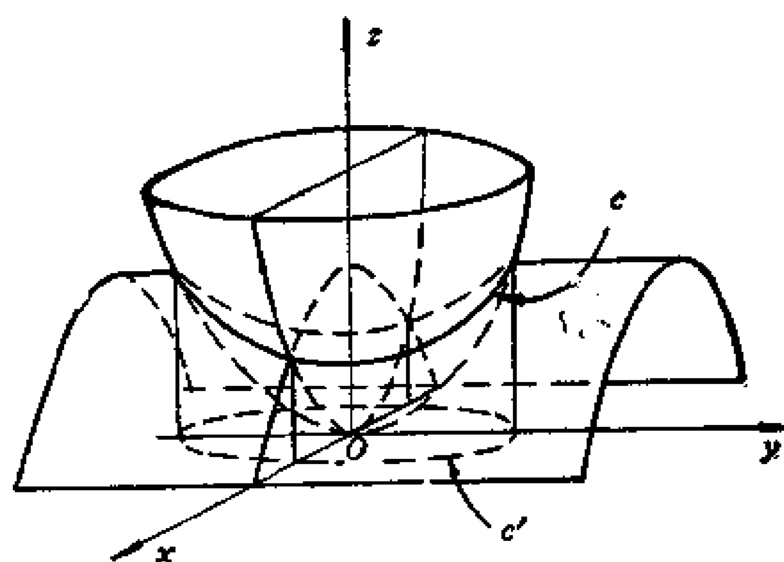


图 7-55

附录　积分表

说明：

1. 为了便于排印，在本表中没有写出积分常数C，也没有给对数的真数加上绝对值符号，使用时应当自己添上.

2. 若无另外注解，本章中的文字a，b，c，m，n，p，r、s都表示实的常数；若分母的因子中有这些文字或这些文字的线性式（如$m+1$，$2n+m$，$r-s$等等，则应把它们等于零的情况除外.

（一）　有理代数函数

A．含有$a+bx$

1. $\int x^m \mathrm{d}x=\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x$.

3. $\int (a+bx)^m \mathrm{d}x=\frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)b}$.

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln(a+bx)$.

5. $\int x^n(a+bx)^m \mathrm{d}x=\frac{1}{b^{n+1}}\int v^m(v-a)^n \mathrm{d}v$，其中$v=a+bx$.

6. $\int \frac{x^n}{(a+bx)^m} \mathrm{d}x=\frac{1}{b^{n+1}}\int \frac{(v-a)^n}{v^m}\mathrm{d}v$，其中$v=a+bx$.

下面的公式7–13都是 6 的特例.

7. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}.$$

8. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}.$$

9. $$\int \frac{x}{a+bx}\, dx = \frac{1}{b^2}\left((a+bx) - a\ln(a+bx)\right).$$

10. $$\int \frac{x}{(a+bx)^2}\, dx = \frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right].$$

11. $$\int \frac{x}{(a+bx)^3}\, dx = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right].$$

12. $$\int \frac{x^2}{a+bx}\, dx = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)\right].$$

13. $$\int \frac{x^2}{(a+bx)^2} dx = \frac{1}{b^3}\left[(a+bx) - 2a\ln(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right].$$

14. $$\int \frac{dx}{x^n(a+bx)^m} = -\frac{1}{a^{m+n-1}}\int \frac{(v-b)^{m+n-2}}{v^m} dv,$$ 其中

$$a+bx = xv.$$

下面的15—18都是14的特例.

15. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+bx}.$$

16. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2}\ln\frac{x}{a+bx}.$$

17. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x}.$$

18. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx)^2}=-\frac{a+2bx}{a^2x(a+bx)}+\frac{2b}{a^3}\ln\frac{a+bx}{x}.$$

B. 含有$a^2\pm x^2$、$b+cx^n$

19. $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

20. $$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}.$$

21. $$\int\frac{dx}{b+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{bc}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c}{b}}x\quad(b>0,\ c>0).$$

22. $$\int\frac{dx}{b+cx^2}=\frac{1}{2\sqrt{-bc}}\ln\frac{\sqrt{b}+x\sqrt{-c}}{\sqrt{b}-x\sqrt{-c}}\quad(b>0.c<0).$$

23. $$\int\frac{dx}{(b+cx^2)^{m+1}}=\frac{x}{2mb(b+cx^2)^m}+\frac{2m-1}{2mb}\int\frac{dx}{(b+cx^2)^m}.$$

24. $$\int\frac{x\,dx}{b^2+cx^2}=\frac{1}{2c}\ln(b+cx^2).$$

25. $$\int\frac{x\,dx}{(b+cx^2)^{m+1}}=\frac{-1}{2cm(b+cx^2)^m}.$$

26. $$\int\frac{x^2dx}{b+cx^2}=\frac{x}{c}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{b+cx^2}.$$

27. $$\int\frac{x^2dx}{(b+cx^2)^{m+1}}=\frac{-x}{2mc(b+cx^2)^m}+\frac{1}{2mc}\int\frac{dx}{(b+cx^2)^m}.$$

28. $$\int\frac{dx}{x(b+cx^2)}=\frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{b+cx^2}.$$

29. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(b+cx^2)}=-\frac{1}{bx}-\frac{c}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{b+cx^2}.$$

30. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(b+cx^2)^{m+1}}=\frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(b+cx^2)^m}-\frac{c}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{(b+cx^2)^{m+1}}.$$

31. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{b+cx^3}=\frac{k}{3b}\left[\ln\frac{x+k}{\sqrt{x^2-kx+k^2}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right],$$

其中 $k=\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$.

32. $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{b+cx^3}=\frac{1}{3ck}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2-kx+k^2}}{x+k}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right],$$

其中 $k=\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$.

33. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(b+cx^n)^{p+1}}=\frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{(b+cx^n)^p}-\frac{c}{b}\int \frac{x^n\mathrm{d}x}{(b+cx^n)^{p+1}}.$$

34. $$\int \frac{x^m}{(b+cx^n)^{p+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{c}\int \frac{x^{m-n}}{(b+cx^n)^p}\mathrm{d}x-\frac{b}{c}\int \frac{x^{m-n}}{(b+cx^n)^{p+1}}\,\mathrm{d}x.$$

35. $$\int\frac{dx}{x(b+cx^n)}=\frac{1}{bn}\ln\frac{x^n}{b+cx^n}.$$

36. $$\int\frac{dx}{x^m(b+cx^n)^{p+1}}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{x^m(b+cx^n)^p}-\frac{c}{b}\int\frac{dx}{x^{m-n}(b+cx^n)^{p+1}}.$$

37. $$\int x^m(b+cx^n)^{p+1}dx$$

$$=\frac{x^{m-n+1}(b+cx^n)^{p+2}}{c(np+m+n+1)}-\frac{b(m-n+1)}{c(np+m+n+1)}\int x^{m-n}(b+cx^n)^{p+1}dx$$

$$=\frac{x^{m+1}(b+cx^n)^{p+1}}{np+m+n+1}+\frac{bn(p+1)}{np+m+n+1}\cdot\int x^m(b+cx^n)^p dx.$$

C. 含有$X=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ $(\gamma\neq0)$

把它配成完全平方，就可以用上面B的公式，令

$$X=\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma}+\gamma\left(x+\frac{\beta}{2\gamma}\right)^2,\quad b=\alpha-\frac{\beta^2}{4\gamma},\quad c=\gamma,$$

$$y=x+\frac{\beta}{2\gamma},$$

得 $$X=b+cy^2.$$

这个形式的积分可以用上面B的公式求出。

（二）根式代数函数

A．含有$\sqrt{a+bx}$

38. $\int\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$.

39. $\int x\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}$.

40. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}.$$

41. $\int x^m\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{b(2m+3)}\left(x^m\sqrt{(a+bx)^3}\right.$

$$\left.-ma\int x^{m-1}\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x\right).$$

42. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$

43. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\quad(a>0)$.

44. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\quad(a<0)$.

45. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}$.

46. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{nax^n}$

$$-\frac{(2n-1)b}{2na}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx}}\quad(n>0).$$

47. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}.$$

48. $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}.$$

49. $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2x^m\sqrt{a+bx}}{(2m+1)b}$$

$$-\frac{2ma}{(2m+1)b}\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx}}dx.$$

50. $$\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$$

51. $$\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n+1}}dx=-\frac{1}{na}\left[\frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{x^n}+\frac{(2n-3)b}{2}\right.$$

$$\left.\cdot\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}dx\right]\quad(n>0).$$

52. $$\int f(x,\sqrt[n]{a+bx})dx=\frac{n}{b}\int f\left(\frac{y^n-a}{b},\ y\right)y^{n-1}dy,$$ 其中

$$a+bx=y^n.$$

B. 含有$\sqrt{x^2\pm a^2}$，$\sqrt{a^2-x^2}$

53. $$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2}$$

$$\pm\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}).$$

54. $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$.

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$.

57. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$.

58. $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$.

59. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$.

60. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

61. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$.

62. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right)$.

63. $\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right)$.

64. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\arccos\frac{a}{x}$.

65. $\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2}$

$$-\frac{a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

66. $\int x^3\sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx = \left(\pm\frac{x^2}{5} - \frac{2a^2}{15}\right)\sqrt{(a^2 \pm x^2)^3}$.

$$+\frac{3}{8}a^2x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}.$$

76. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}}=\frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

77. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

78. $$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}).$$

79. $$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}.$$

80. $$\int\sqrt{(x^2\pm a^2)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{x\sqrt{(x^2\pm a^2)^n}}{n+1}$$
$$\pm\frac{na^2}{n+1}\int\sqrt{(x^2\pm a^2)^{n-2}}\,\mathrm{d}x.$$

81. $$\int\sqrt{(a^2-x^2)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{x\sqrt{(a^2-x^2)^n}}{n+1}$$
$$+\frac{na^2}{n+1}\int\sqrt{(a^2-x^2)^{n-2}}\,\mathrm{d}x.$$

82. $$\int x\sqrt{(x^2\pm a^2)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{(x^2\pm a^2)^{n+2}}}{n+2}.$$

83. $$\int x\sqrt{(a^2-x^2)^n}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^{n+2}}}{n+2}.$$

C. 含有$\sqrt{a+bx+cx^2}\equiv\sqrt{X}$ $(b^2\neq 4ac)$

令 $D\equiv 4ac-b^2$，$k\equiv\frac{4c}{D}$

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\sqrt{X} + \frac{2cx+b}{2\sqrt{c}}\right)$ $(c>0)$.

85. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{-D}}\right)$ $(c<0)$.

86. $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{4cx+2b}{D\sqrt{X}}$.

87. $$\int \frac{dx}{X^n\sqrt{X}} = \frac{(4cx+2b)\sqrt{X}}{(2n-1)DX^n} + \frac{2k(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{X^{n-1}\sqrt{X}}.$$

88. $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{4c} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$.

89. $$\int X^n\sqrt{X}\,dx = \frac{(2cx+b)X^n\sqrt{X}}{4(n+1)c} + \frac{2n+1}{2(n+1)k}\int \frac{X^n dx}{\sqrt{X}}.$$

90. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$.

91. $\int \frac{x\,dx}{X^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(2n-1)cX^n} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^n\sqrt{X}}$.

92. $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{X}\,dx$.

93. $\int xX^n\sqrt{X}\,dx = \frac{X^{n+1}\sqrt{X}}{(2n+3)c} - \frac{b}{2c}\int X^n\sqrt{X}\,dx$.

94. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{a}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$ $(a>0)$.

95. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{bx+2a}{x\sqrt{-D}}\right)$ $(a<1,\ D<0)$.

96. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{2\sqrt{X}}{bx}$ $\qquad (a=0)$.

97. $$\int \frac{dx}{xX^n\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{(2n-1)aX^n} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xX^{n-1}\sqrt{X}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^n\sqrt{X}}.$$

98. $$\int \frac{\sqrt{X}dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

99. $$\int \frac{X^n\sqrt{X}dx}{x} = \frac{X^n\sqrt{X}}{2n+1} + a\int \frac{X^{n-1}\sqrt{X}dx}{x} + \frac{b}{2}\int X^{n-1}\sqrt{X}dx.$$

100. $$\int \frac{m+nx}{\sqrt{X}}\, dx = \frac{n\sqrt{X}}{c} + \frac{2cm-bn}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

101. $$\int \frac{dx}{(m+nx)\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{l}} \ln\left(\frac{-n\sqrt{X}+\sqrt{l}}{m+nx} + \frac{bn-2cm}{2\sqrt{l}}\right) \quad (l>0).$$

其中$l \equiv an^2 - bmn + cm^2$，以下仿此。

102. $$\int \frac{dx}{(m+nx)\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-l}} \arcsin\left[\frac{(bn-2cm)(m+nx)+2l}{n(m+nx)\sqrt{-D}}\right] \quad (l<0).$$

103. $\int \frac{dx}{(m+nx)\sqrt{X}}=-\frac{2n\sqrt{X}}{(bn-2cm)(m+nx)} \quad (l=0).$

104. $\int (m+nx)\sqrt{X}dx=\frac{nX\sqrt{X}}{3c}-\frac{bn-2cm}{2c}\int \sqrt{X}dx.$

105. $\int \frac{\sqrt{X}dx}{m+nx}=\frac{\sqrt{X}}{n}+\frac{bn-2cm}{2n^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$

$$+\frac{l}{n^2}\int \frac{dx}{(m+nx)\sqrt{X}}.$$

106. $\int \frac{x^m X^n dx}{\sqrt{X}}=\frac{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}{(2n+m)c}-\frac{(2n+2m-1)b}{2c(2n+m)}$

$$\cdot\int \frac{x^{m-1}X^n dx}{\sqrt{X}}-\frac{(m-1)a}{(2n+m)c}\int \frac{x^{m-2}X^n dx}{\sqrt{X}}.$$

107. $\int \frac{x^m dx}{X^n\sqrt{X}}=\frac{1}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{X^{n-1}\sqrt{X}}-\frac{b}{c}$

$$\cdot\int \frac{x^{m-1}dx}{X^n\sqrt{X}}-\frac{a}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{X^n\sqrt{X}}.$$

108. $\int \frac{dx}{x^m X^n\sqrt{X}}=-\frac{\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}X^n}$

$$-\frac{(2n+2m-3)b}{2(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n\sqrt{X}}-\frac{(2n+m-2)c}{(m-1)a}$$

$$\cdot\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n\sqrt{X}}.$$

109. $\int \frac{X^n dx}{x^m\sqrt{X}}$

$$=-\frac{X^{n-1}\sqrt{X}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{(2n-1)b}{2(m-1)}\int \frac{X^{n-1}dx}{x^{m-1}\sqrt{X}}$$

$$+\frac{(2n-1)c}{m-1}\int\frac{X^{n-1}\mathrm{d}x}{x^{m-2}\sqrt{X}}.$$

D. 其它根式

110. $\int\sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+a^2\arcsin\frac{x-a}{a}\right].$$

111. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\arccos\frac{a-x}{a}.$

112. $\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{(a+x)(b+x)}$

$$+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}).$$

113 $\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{(a-x)(b+x)}$

$$+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}.$$

114. $\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,\mathrm{d}x=-\sqrt{(a+x)(b-x)}$

$$-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}.$$

115. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}.$

(三)超越函数

下面的m，n为正整数；p，q为任意整数。

A. 仅含三角函数

116. $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x.$

117. $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$

118. $\int \sin^{2n+1} x \mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x \mathrm{d}x,$

把$(1-\cos^2 x)^n$展开后，再用公式131.

119. $\int \sin^{2n} x \mathrm{d}x = -\frac{\sin^{2n-1} x \cos x}{2n}$

$+\frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2} x \mathrm{d}x.$

120. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \csc x \mathrm{d}x$，再用公式166.

121. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2n+1} x} = \frac{-\cos x}{2n \sin^{2n} x} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2n-1} x}.$

122. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2n} x} = \int \csc^{2n} x \mathrm{d}x$，再用公式169.

123. $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x.$

124. $\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$

125. $\int \cos^{2n+1} x \mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^n \cos x \mathrm{d}x,$

把$(1-\sin^2 x)^n$展开后，再用公式130.

126. $\int \cos^{2n} x \mathrm{d}x = \frac{\cos^{2n-1} x \sin x}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{n-2} x \mathrm{d}x.$

127. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx$，应用公式162.

128. $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1}x} = \frac{\sin x}{2n\cos^{2n}x} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{\cos^{2n-1}x}$.

129. $\int \frac{dx}{\cos^{2n}x} \int \sec^{2n}x dx$再用公式165.

130. $\int \sin^r x \cos x dx = \frac{\sin^{r+1}x}{r+1}$

131. $\int \sin x \cos^r x dx = -\frac{\cos^{r+1}x}{r+1}$.

132. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$.

133. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x$.

134. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - \csc x$.

135 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + \sec x$.

136. $\int \sin^p x \cos^q x dx = -\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q+1}x}{q+1}$

$$+\frac{p+q+2}{q+1}\int \sin^p x \cos^{q+2} x dx.$$

$$= \frac{\sin^{p+1}x\cos^{q+1}x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\int \sin^{p+2}x \cos^q x dx$$

（当p、q不同时为正整数时使用）。

137. $\int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x}{p+q}$

$$+\frac{q-1}{p+q}\int \sin^{p}x\cos^{q-2}x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sin^{p-1}x\cos^{q+1}x}{p+q}+\frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2}x\cos^{q}x\mathrm{d}x$$

138. $\int \sin rx\sin sx\mathrm{d}x=-\frac{\sin(r+s)x}{2(r+s)}+\frac{\sin(r-s)x}{2(r-s)}.$

139. $\int \sin rx\cos sx\mathrm{d}x=-\frac{\cos(r+s)x}{2(r+s)}-\frac{\cos(r-s)x}{2(r-s)}.$

140. $\int \cos rx\cos sx\mathrm{d}x=\frac{\sin(r+s)x}{2(r+s)}+\frac{\sin(r-s)x}{2(r-s)}.$

141. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arctg}\frac{a\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$(a^2>b^2).$

142. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}$

$(a^2<b^2)$

143. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\mathrm{tg}x-\sec x.$

144. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}=\mathrm{tg}x+\sec x.$

145. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ $(a^2>b^2).$

146. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b-a}\,\mathrm{gt}\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\,\mathrm{gt}\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}$

$(b^2>a^2)$.

147. $\int \frac{dx}{1+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

148. $\int \frac{dx}{1-\cos x}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

149. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$.

150. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg}x}{a}\right)$.

151. $\int \sqrt{1-\cos x}\,dx=-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

152. $\int \sqrt{1+\cos x}\,dx=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$.

153. $\int \operatorname{tg}x\,dx=-\ln\cos x=\ln\sec x$.

154. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\,dx=\operatorname{tg}x-x$.

155. $\int \operatorname{tg}^{2n+1}x\,dx=\int(\sec^2 x-1)^n\operatorname{tg}x\,dx$,

把$(\sec^2 x-1)^n$展开后，再用公式170.

156. $\int \operatorname{tg}^{2n}x\,dx=\frac{\operatorname{tg}^{2n-1}x}{2n-1}-\frac{\operatorname{tg}^{2n-3}x}{2n-3}+\frac{\operatorname{tg}^{2n-5}x}{2n-5}$

$-\cdots+(-1)^{n+1}(\operatorname{tg}x-x)$.

157. $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(b\ln(a\cos x+b\sin x)+ax\right)$.

158. $\int \operatorname{ctg}x\,dx=\ln\sin x$.

171. $\int \csc^{s} x \operatorname{ctg} x dx = -\frac{\csc^{s} x}{s}$.

172. $\int \operatorname{tg}^{s} x \sec^{2} x dx = \frac{1}{s+1} \operatorname{tg}^{s+1} x$.

173. $\int \operatorname{ctg}^{s} x \csc^{2} x dx = -\frac{1}{s+1} \operatorname{ctg}^{s+1} x$.

B. 仅含反三角函数

174. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^{2}}$.

175. $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^{2}}$.

176. $\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^{2}}$.

177 $\int \operatorname{arcctg} x dx = x \operatorname{arcctg} x + \ln \sqrt{1+x^{2}}$.

178. $\int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arc\,sec} x - \ln (x + \sqrt{x^{2}-1})$.

179. $\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \ln (x + \sqrt{x^{2}-1})$.

C. 仅含双曲函数或反双曲函数

180. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$.

181. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$.

182. $\int \operatorname{th} x\mathrm{d}x = \ln \operatorname{ch} x.$

183. $\int \operatorname{cth} x\mathrm{d}x = \ln \operatorname{sh} x.$

184. $\int \operatorname{sech} x\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg} e^x.$

185. $\int \operatorname{csch} x\mathrm{d}x = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}.$

186. $\int \operatorname{sh}^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x).$

187. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{ch}(2x).$

188. $\int \operatorname{ch}^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + x).$

189. $\int \operatorname{th}^2 x\mathrm{d}x = x - \operatorname{th} x.$

190. $\int \operatorname{cth}^2 x\mathrm{d}x = x - \operatorname{cth} x.$

191. $\int \operatorname{sech}^2 x\mathrm{d}x = \operatorname{th} x.$

192. $\int \operatorname{csch}^2 x\mathrm{d}x = -\operatorname{cth} x.$

193. $\int \operatorname{sh}(mx)\operatorname{sh}(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2-n^2}[m\operatorname{sh}(nx)\operatorname{ch}(mx) - n\operatorname{ch}(nx)\operatorname{sh}(mx)].$

194. $\int \operatorname{ch}(mx)\operatorname{sh}(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2-n^2}[m\operatorname{sh}(nx)\operatorname{sh}(mx)$

$-n\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}(mx)\}$.

195. $\int \operatorname{ch}(mx)\operatorname{ch}(nx)\,dx$

$$=\frac{1}{m^2-n^2}\{m\operatorname{sh}(mx)\operatorname{ch}(nx)-n\operatorname{sh}(nx)\operatorname{ch}(mx)\}.$$

196 $\int \operatorname{arsh}x\,dx = x\operatorname{arsh}x-\sqrt{1+x^2}$.

197. $\int \operatorname{arch}x\,dx = x\operatorname{arch}x-\sqrt{x^2-1}$.

198. $\int \operatorname{arth}x\,dx = x\operatorname{arth}x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

D. 其他超越函数

199. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}$.

200. $\int a^{bx}dx=\frac{1}{b\ln a}a^{bx}\quad(a>0)$

201. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$.

202. $\int \log_a x\,dx = x\log_a x - x\log_a e\quad(a>0)$.

203. $\int x\sin ax\,dx=\frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{1}{a}x\cos ax$.

204. $\int x^r\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}x^r\cos ax+\frac{r}{a}\int x^{r-1}\cos ax\,dx$.

205. $\int x\cos ax\,dx=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{1}{a}x\sin ax$.

206. $$\int x^r\cos ax\,dx=\frac{1}{a}x^r\sin ax-\frac{r}{a}\int x^{r-1}\sin ax\,dx.$$

207. $$\int\frac{x\,dx}{\sin^2x}=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\ln\sin x.$$

208 $$\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}=x\,\mathrm{tg}\,x+\ln\cos x.$$

209. $$\int x\arcsin x\,dx=\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}].$$

210. $$\int x\arccos x\,dx=\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arccos x-x\sqrt{1-x^2}].$$

211. $$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\frac{1}{2}[(x^2+1)\mathrm{arctg}\,x-x].$$

212 $$\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx=\frac{1}{2}[(x^2+1)\mathrm{arcctg}\,x+x].$$

213. $$\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}(ax-1)}{a^2}.$$

214. $$\int x^re^{ax}dx=\frac{x^re^{ax}}{a}-\frac{r}{a}\int x^{r-1}e^{ax}dx.$$

215. $$\int\frac{dx}{a+be^{rx}}=\frac{1}{ar}[rx-\ln(a+be^{rx})].$$

216. $$\int\frac{dx}{ae^{rx}+be^{-rx}}=\frac{1}{r\sqrt{ab}}\mathrm{arctg}\left(e^{rx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\quad(ab>0).$$

217. $$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx).$$

218. $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx).$$

219. $\int e^{ax}\sin^n bx\,dx$

$$=\frac{1}{a^2+n^2b^2}\Big((a\sin bx-nb\cos bx)e^{ax}\sin^{n-1}bx$$

$$+n(n-1)b^2\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx\Big).$$

220. $\int e^{ax}\cos^n bx\,dx$

$$=\frac{1}{a^2+n^2b^2}\Big((a\cos bx+nb\sin bx)e^{ax}\cos^{n-1}bx$$

$$+n(n-1)b^2\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx\Big).$$

221. $\int x^r\ln x\,dx=x^{r+1}\left[\frac{\ln x}{r+1}-\frac{1}{(r+1)^2}\right].$

222. $\int(\ln x)^r dx=x(\ln x)^r-r\int(\ln x)^{r-1}dx.$

223. $\int\frac{(\ln x)^r}{x}\,dx=\frac{1}{r+1}(\ln x)^{r+1}.$

224. $\int\frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln x).$

225. $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx=x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x.$

226. $\int x\,\mathrm{ch}\,x\,dx=x\,\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x.$

227 $\int x\,\mathrm{arsh}\,x\,dx=\frac{1}{4}\left((2x^2+1)\mathrm{arsh}\,x-x\sqrt{1+x^2}\right).$

228. $\int x \operatorname{arch} x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left((2x^2-1)\operatorname{arch} x - x\sqrt{x^2-1}\right).$

229. $\int \operatorname{sh} x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x).$

230. $\int \operatorname{ch} x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \cos x + \operatorname{ch} x \sin x).$

231 $\int \operatorname{sh} x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x).$

232. $\int \operatorname{ch} x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \sin x - \operatorname{ch} x \cos x).$